Von witzigen Aufgaben zu tiefliegenden Problemen

Vladimir Georgiev

1 Einführung

Die Hauptüberraschung des Wettbewerbs zum Stellen von Aufgaben beim Teambewerb „Galilei“ 2009 war ein Problem, das ursprünglich völlig harmlos aussah und auf eher unübliche Weise entstand: Die Studierenden und die Lehrkraft begannen mit einer realen Situation und gelangten schließlich zu einem tiefen mathematischen Problem, das nach dessen bekanntwerden heftig von KollegInnen an der Universität diskutiert wurde. Beginnen wir mit dem mathematischen Problem, welches dort besprochen wurde: Wenn man ein Quadrat in der Ebene gegeben hat, kann man alle Kurven γ betrachten, deren ε – Umgebung das Quadrat überdeckt. Das Problem besteht jetzt darin eine Kurve minimaler Länge zu finden, die diese Eigenschaft erfüllt.

Die Überraschung dabei war die Tatsache dass dieses Problem völlig offen schien und in jenen Artikeln, die den KollegInnen der Universität Pisa bekannt waren, nur für sehr kleine ε diskutiert wurde.

Das Beispiel, welches wir hier beschreiben werden, ist sehr wichtig für Aufgabenstellungen und auch für das Modellieren in anderen Sparten der Naturwissenschaften und des realen Lebens. Der Standard-Lehrplan in der Sekundarschule hat eine gut organisierte Struktur, die auf Vorträgen und Aufgaben mit konkreten Beispielen und Problemen mit vorgegebenen Antworten beruht. Mathematisches Modellieren ist daher etwas riskant, da:

- wichtige physikalische Phänomene sehr komplizierte Modelle erfordern, die höhere Mathematik benötigen,
- es Modelle gibt, die keine strenge mathematische Behandlung oder Lösung ermöglichen.

2 Lehrinhalte, die in dieser Einheit behandelt werden

2.1 Mathematische Lehrinhalte

- Geometrie der Ebene und des Raumes

2.2 Physikalische Lehrinhalte

- Astronomie und Navigation
- Klassische Mechanik

2.3 Mathematische Werkzeuge

- Variationsverfahren
- Gewöhnliche Differentialgleichungen

3 Die Aufgabe und Lösungsversuche

Wir kommen jetzt zur „harmlosen“ Aufgabe, welche vom Team der Schule „Dini“ in Pisa gestellt wurde.

3.1 Aufgabe Mondsatellit

Der Satellit THETA von GoogleMoon ist mit einer Kamera mit einem 20-Grad-Öffnungswinkel versehen. Um qualitativ hochwertige Fotos zu machen, muss der Satellit den Mond in einem konstanten Radius von R=1738 km umkreisen, und die Kamera muss immer in Richtung Mondzentrum gerichtet sein. Finde die minimale Länge des Weges, die der Satellit zurücklegen muss, um mit dieser Kamera die ganze Mondoberfläche fotografieren zu können.

Fig.1 NASA-Bild des Mondes ([3])

Bemerkung: Wenn der Öffnungswinkel des Objektives der Kamera 20 Grad beträgt, dann ist der Halböffnungswinkel 10 Grad.

Fig.2 NASA-Satellit ([3])

Man kann sehen, dass das Problem ähnlich zu jenem Problem der minimalen Kurve ist, welches die KollegInnen an der Universität Pisa bereits kannten. Dabei wurde allerdings ein Quadrat beobachtet, während in der Aufgabe des Teams von „Dini“ eine Kugeloberfläche betrachtet wurde. Die Aufgabe aus der Realität führt daher zu einem sehr tiefliegenden Problem in der Mathematik!

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe führte zu der Frage, wie die Teams die Aufgabe lösen sollten, wo sie doch keine tiefliegenden mathematischen Werkzeuge besaßen. Doch auch die Mathematik-Spezialisten konnten das Problem nicht lösen. Das Team von Brescia schlug eine interessante Simulation mittels einer Orange vor.

3.2 Lösungsversuch des Teams von Brescia, Italien

Betrachten wir den Schnitt der Mondkugeloberfläche und der Ebene, welche durch den Satelliten geht, sowie die Linie, die den Kegel des Kameraöffnungswinkels erzeugt. Die Kugelschale, welche von der Kamera gesehen wird erhält man, indem man die beiden Linien mit dem Umfang schneidet. Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man die Koordinaten der Schnittpunkte und somit den Tangens des Halbwinkels der Kugelschale, die von der Kamera gesehen wird.

Jetzt muss man den minimalen Weg finden! Wir glauben dass es eine Spirale sein kann, können das aber nicht berechnen. Dabei haben wir eine Menge Orangen abgeschält. Wir begannen mit einer Kugelschale von etwa 20° und setzten mit einer Spirale fort, die etwa die gleiche Dimension hat. Dann haben wir die Länge der Orangenschale gemessen und das Verhältnis zwischen dem Orangenradius und dem Radius des Orbits des Satelliten bestimmt, was aber sicher nicht der richtige Weg sein dürfte.

3.2 Lösungsversuch des Teams von „Dini“, Pisa, Italien

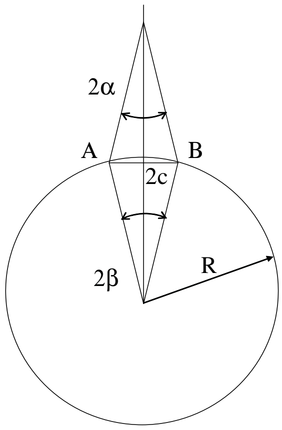
Das Team von „Dini“ schlug eine Idee vor, die näher am Vorschlag der Forscher vom Institut für Mathematik der Universität Pisa lag.

Problemdaten

$R = 1738km$ Radius des Mondes

$2\alpha = 20°$

$H = R$ Abstand des Satelliten vom Boden



Trigonometrisch erhält man die Hälfte von AB (=c) und den Halbwinkel β.

$$\sin\beta = \frac{c}{R}$$

$$c = R\left(2 - \sqrt{1-(\sin\beta)^2}\right)\tan\alpha$$

Daraus folgt

$$\frac{c}{R} = \sin\beta = 0.179$$

Daher ist der Halbwinkel

$$a = R\beta = 313.1km$$

Die von der Kamera erfasste Fläche (also die Fläche der Kugelschale) ist daher:

$$A_c = 2\pi R^2\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{c}{R}\right)^2}\right) = 3.072\cdot 10^5 km^2$$

Von wo aus man den minimalen theoretischen Wert L_{mt} der Projektion der Satellitenbahn auf dem Mond berechnen kann.

$$A_c + L_{mt}\cdot 2a = 4\pi R^2,$$

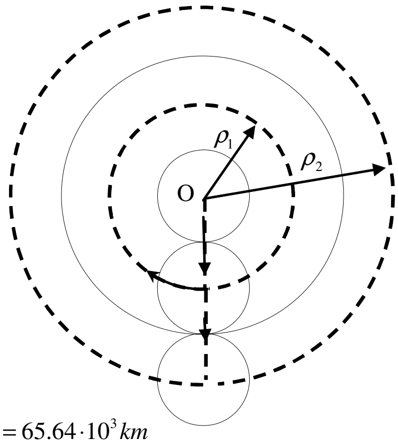
und daher

$$L_{mt} = 34.6R = 6.013\cdot 10^4 km.$$

Man kann nicht garantieren, dass dieser Wert durch eine stetige Bewegung des Satelliten erreicht werden kann. Eine mögliche Strategie für die Bewegung ist es, die Mondoberfläche mit konzentrischen Kreisen zu überdecken, sich entlang des Meridians zu bewegen und damit an einem der Pole zu beginnen.

Wir berechnen den Radius jedes Umfanges und erhalten damit:

i	ρ_i (km)
1	612.8
2	1.147 10^3
3	1.534 10^3
4	1.723 10^3
5	1.692 10^3
6	1.443 10^3
7	1.00910^3
8	445.4



Daher ist die Länge des Weges gegeben durch:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{8} \rho_i + (\pi - \beta + \gamma) R = 37.8R = 65.64 \cdot 10^3 km$$

wobei die letzte Öffnung des Kreises um den gegenüberliegenden Pol ist, die noch nicht von einem der bisherigen Kreise überdeckt ist.

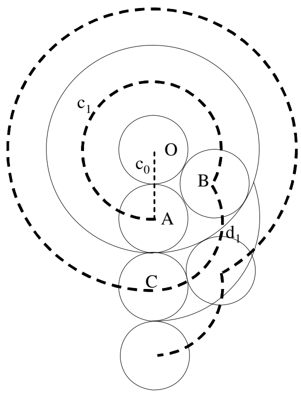
Die Effizienz dieser Strategie beträgt

$$e_1 = \frac{L_{mt}}{L_1} = 0.916$$

Eine mögliche Verbesserung der Effizienz kann durch die folgende Strategie erreicht werden: Der Übergang zwischen den Levels wird durch Kreise, welche tangential zum Anfangskreis liegen, durchgeführt

Dabei ergeben sich die folgenden Werte:

i	c_i (km)	d_i (km)
0	612.8	
1	3.227 10^3	1.585 10^3
2	6.583 10^3	1.295 10^3
3	9.013 10^3	1.211 10^3
4	1.021 10^4	1.184 10^3
5	1.001 10^4	1.188 10^3
6	8.445 10^3	1.227 10^3
7	5.717 10^3	1.341 10^3
8	2.175 10^3	137.3



Daraus folgt

$$L_2 = c_0 + \sum_{i=1}^{8} (c_i + d_i) = 37.5R = 65.17 \cdot 10^3 km$$

was uns eine leichte Verbesserung der Effizienz im Vergleich zur vorigen Methode liefert::

$$e_2 = \frac{L_{mt}}{L_2} = 0.923.$$

Wir schlagen daher folgende Lösung für die minimale Weglänge vor:

$$2L_2 = 75.0R = 130.3 \cdot 10^3 \, km.$$

Es gab die Entscheidung, ein gemeinsames Seminar mit dem Team von „Dini“ und den Forschern der Universität Pisa zu veranstalten, um eine vollständige Lösung des Problems zu finden

4 Schlussfolgerungen

Wir müssen akzeptieren, dass wir „nur wissen, dass wir nichts wissen“ (Apology von Sokrates 23b, 29b). Die Beschränkungen unserer Fähigkeiten und Möglichkeiten, die Welt zu verstehen, soll eine Motivation sein, weiterhin zu versuchen, diese Schranken zu überwinden.

Literatur

[1] **http://www.dm.unipi.it/~eroe/index.php** , Homepage des „Galilei“ Wettbewerbs

[2] **http://www.dm.unipi.it/~eroe/problemi.php** , Aufgaben aus dem Wettbewerb

[3] **http://www.nasa.gov**