

## Това не е заглавието на тази статия

Евгения Сендова

### 1 Парадоксите – тук, там, навсякъде

Съжалявам много, че писмото ми излезе толкова дълго – писал на свой приятел големият френски математик и философ Блез Паскал – но нямал достатъчно време да го направя по-късо... На пръв поглед тази мисъл може да изглежда парадоксална, но помислете само колко трудно е да се каже с десет изречения това, което други казват в цели книги (а да не говорим за това, което други НЕ успяват да кажат в цели книги)... Какво всъщност е парадоксът? Дори най-реномираните речници не са съвсем единодушни по въпроса – според Уебстър това е съждение, което макар и да е вярно, изглежда лъжливо и си противоречи само, а в Лонгман четем, че парадоксът е съждение, което изглежда глупаво или невъзможно, но съдържа някаква истина. Етимологията на думата парадокс е от старогръцкото неочакван, противоречащ на общоприетото мнение.

Един от най-добрите популяризатори на математиката, Мартин Гарднър, класифицира парадоксите в четири основни категории [1]:

- твърдения, които изглеждат неверни, но всъщност са верни;
- твърдения, които изглеждат верни, но всъщност са неверни;
- последователност от наглед логически свързани твърдения, които водят до логическо противоречие (т. нар. *погрешен извод*);
- твърдения, за които не може да се каже дали са верни или неверни;

Животът е пълен с парадокси (във всяко от горепосочените значения) до такава степен, че изглежда парадоксално да не се натъкнем на тях в ежедневието си. Преди време запитал продавачката в една книжарница дали имат *Как се казва тази книга?* (прекрасна творба на Реймънд Смялян за логическите парадокси). Продавачката беше искрено изненадана: *Вие не знаете как се казва, а от мен очаквате да се сетя...*

Получавала съм факс, в който се четеше единствено: *Ако не получите този факс, обадете ни се по телефона...* Може би сте срещали обяви от типа: *Ако не можете да прочетете това, обадете се на тел. 89-60-01.* Или сте виждали падащи дървени табели с надписи от типа: *Пази се от падащи предмети!* Или пък стени като изобразената на Фиг. 1.



Фиг.1 „Не пишете тук!“



Фиг.2 Всички критяни лъжат  
(Художник: Йовко Коларов)

Тук следват няколко истории, които дори да не са истина, биха могли да бъдат:

- На лекция по математика един от аудиторията казал: *Мисля, че имате грешка в изчисленията.* Отговорът бил: *В живота си съм грешил само веднъж – и това бе, когато помислих, че съм срещнал...*
  - Бертран Ръсел например изразил убедеността си, че английският философ Джордж Едвард Мур е излъгал само веднъж в живота си – когато го запитали дали винаги е казал истината. Тогава Мур се замислил за момент и казал: *Не.*
- Много афоризми, анекдоти и карикатури са основани на парадокси. Ето няколко примера. Оскар Уайлд, великият ирландски писател, е казал: *Въпреки че изглежда парадоксално, животът имитира изкуството много повече, отколкото изкуството имитира живота.*

Комикът Гручо Маркс е запомнен и с някои от парадоксалните си изказвания:

- *Моля, приежете оставката ми. Не искам да членувам в клуб, който ме е приел за член.*
- *Телевизията допринася много за образованието ми. Всеки път, когато някой включи телевизора, аз отивам в другата стая да чета книга.*
- *Има само един начин да разбереш дали един човек е честен – попитай го. Ако каже „да”, ще знаеш, че е мошеник.*

Станислав Йежи Лец, един от най-значителните творци на афоризми на 20 век, споделя следните невчесани мисли в едноименната си книга:

- *Ако човек, който не може да брои, намери четирилистна детелина, късметлия ли е?*
- *Радиото е чудесно изобретение – само натискаш копчето и се възцарява тишина...*
- *Не съм съгласен с математиката. Сумата от нули е страшна величина.*
- *Забелязал съм, че хората обичат такива мисли, които не ги принуждават да мислят.*
- *Исках да кажа на света само една дума. Понеже не успях, станах писател.*

А какво да кажем за един от комиксите за *Фъстъчетата*, в които Чарли Браун споделя с приятелката си Луси, че вече има нова житейска философия – да казва НЕ на всеки въпрос.

– Да казваш НЕ на всеки въпрос? – учудва се Луси.

– Да, т. е. не, о-о-о ти разруши новата ми философия... – въздъхва Чарли.

## 1.1 Задачи и въпроси

**Зад. 1.** Помисли за парадокс, на който си се натъквал в ежедневието си.

**Зад. 2.** Опитай се да преведеш на английски език следното изречение: *Това изречение на български е трудно да бъде преведено на английски.*

**Зад. 3.** Разгледай списъка от правила на Харолд Евънс, цитирани в [1]. Обясни къде се крие парадоксът във всяко от тях:

- *Не използвай запети, там, където не е необходимо.*
- *Сказуемостта трябва да се съгласува с подлога.*
- *За онези непълни изречения*
- *Да се не разделят възвратните глаголи в отрицателно-заповедна форма.*
- *Винаги чети това, което си написал, за не пропуснеш дума.*
- *Важно е да използваш „кавичките правилно”.*

**Зад. 4.** Опитай се да обогатиш този списък с парадоксални граматични правила.

**Зад. 5** Помисли или намери парадоксални заглавия на книга, статия, помагало.

**Зад. 6** Баба предложила на внука си да играят на *ядец*. При счупването на ядеча играта приключва и се смята, че победител е този, у когото остане лопатката от костта, и че намисленото му желание ще се сбъдне. Бабата си пожелала внукът ѝ да спечели, но лопатката останала у нея. Спечелила ли е всъщност? Обясни своето твърдение.

## 2 Парадокс ли е това или не? – това е въпросът

Разбира се, това, което се оказва парадокс, често е резултат от недостатъчно математическо познание или разсеяност. Да вземем например момченцето, което се научило да работи с калкулатор и смаяно възкликнало: *1/2 е малко число, 1/4 също е малко число, а гледайте колко голямо се получи числото 1/3!!!* (В какво е срещило то?) Или пък учителят, който се

оплакал: *По-голямата половина от моите ученици не знаят, че двете половини на всяко нещо са равни...* Или класификацията, направена от един разсеян професор по математика: *Има 3 вида математици – тези, които знаят да броят, и тези, които не знаят.*

Дори прочутият парадокс за лъжеца [2] едва ли може да се нарече така. Да припомним историята му – той е свързан с името на един поет от 6-и век пр. н. е., Епименид, жител на остров Крит, който според легендата казал: *Всички критяни лъжат.* Дълго време се е смятало, че това е парадокс. Ето как са разсъждавали древните гърци (а вие се помъчете да откриете грешката в тези разсъждения).

*Ако фразата е вярна, тогава Епименид казва истината, но той е критянин, а това противоречи на твърдението, че всички критяни лъжат. Следователно Епименид е излъгал. Ако пък твърдението е лъжливо, тогава всички критяни казват истината и това ще важи и за Епименид. Следователно това, което казва той, е истина. Пак се стига до противоречие с твърдението, че той е излъгал.* Значи излиза, че горното твърдение не може да бъде нито истина, нито лъжа. (Разбира се тук лъжата е идеализирана в смисъл, че ако някой лъже, той е честен лъжец и си лъже цял живот.) Усетихте ли къде е грешката? Разбира се, логическото отрицание на твърдението *Всички критяни лъжат* не е *Всички критяни казват истината*, а *Не всички критяни лъжат*, т. е. съществува поне един критянин, който казва истината. И така – няма парадокс. Твърдението на Епименид е лъжливо, т. е. той си е лъжец, но има критяни, които казват истината. Ако обаче разгледаме изречението *Аз лъжа*, парадоксът е налице. Наистина, ако лъжа, значи казвам истината (че лъжа). И обратно, ако казвам истината, значи лъжа (че лъжа).

Впрочем не винаги е лесно да се направи логическо отрицание на твърдение. Разгледайте следните примери:

- *Това изречение се състои от шест думи*
- *Половината от учениците ми в клас са глупави.*

Понякога едно съждение се превръща в парадокс поради това, че само една от думите в него изменя значението си с течение на времето. Замисляли ли сте се например колко странно звучи фразата: *Исключенията потвърждават правилото (Excerptio probat regulam).* Оказва се, че глаголът *пробо* (лат.) има две значения – *доказвам (потвърждавам)* и *пробвам* [3]. Така че първоначалният смисъл на тази парадоксална днес фраза е бил: *Исключенията проверяват* (подлагат на проверка верността на) *правилото...* Вече не звучи толкова парадоксално, нали?

## 2.1 Задачи и въпроси

**Зад. 7.** Да предположим, че кажеш: *Аз лъжа.* Това лъжа ли е или истина? Обясни защо.

**Зад. 8.** Луси твърди, че отрицанието на  $x < 10$  е  $x > 10$ . Права ли е? Обясни защо.

**Зад. 9.** Опитай се да съставиш отрицанието на следните твърдения

- *Всички спят.*
- *Никой не внимава.*
- *Някои ученици решиха тази задача.*
- *Всички ученици в този клас са момичета.*
- *Има поне един читател, който е стигнал до тук.*
- *Не всички задачи са предизвикателни.*

## 3 Някои парадокси в науката

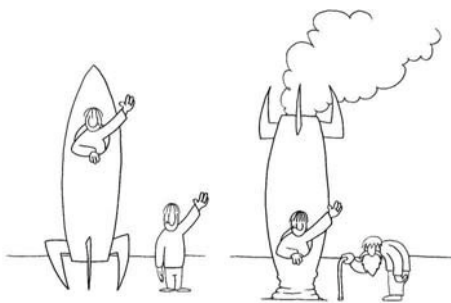
Макар да звучи странно, парадоксите играят съществена роля в развитието на *голямата наука*, защото тя търси “налудничави”, парадоксални теории. Това добре личи от думите на Нилс Бор, който реагира по следния начин на един доклад, изнесен от видните физици Паули и Хайзенберг: *Всички сме съгласни, че вашата теория е безумна. Въпросът е дали тя е достатъчно безумна, за да има шанс да бъде вярна...* Действително пътят на развитие на много научни области е белязан от преодолени парадокси. Редица идеи, които са изглеждали парадоксални, днес вече се приемат като съвсем нормални. Ето няколко примера на „бивши“ парадокси:

- *Тежките предмети не падат по-бързо от леките.*
- *Маларията се причинява от комарите.*
- *Нечетните числа са толкова, колкото и естествените.*

Дори теорията на Айнщайн за относителността, едно от най-големите постижения на нашия век, е била посрещната от Ръдърфорд с думите: *Работата ни не се нуждае от подобна теория*. Тогава Ръдърфорд бил вече световноизвестен учен и тази теория вече не била новост.

Да припомним, че идеята за относителността е била илюстрирана от Айнщайн с парадокса за близнаците – ако единият от двама близнаци бъде изстрелян с ракета, колкото по-дълъг бъде полетът ѝ и по-голяма скоростта ѝ, толкова по-голяма ще бъде разликата във възрастта на двамата близнаци при срещата им на Земята (Фиг. 3).

Не случайно Харди казва: *Ако не беше Айнщайн, физическата картина на Земята щеше да бъде различна...*



Фиг.3 Парадоксът на близанците според Айнщайн.



Фиг.4 *Аз мога да бръсна само онези, които не могат да се бръснат сами. Мога ли тогава да се обръсна?*

(Художник: Йовко Коларов)

Най-големият парадокс в научен контекст е, че в математиката също има парадокси. Отгоре на всички тези парадокси са едни от най-заплетените...

### 3. 1 Парадокси в математиката

В своята история математиката е преживяла три кризи, свързани с разрешаването на парадокси. Но опитите за разрешаването им е довело до нови интересни и важни теории.

Първата криза се разразила във връзка с откритието, че страната на квадрата и диагонала му не са съизмерими, т. е. че не могат да се измерят с една и съща мерна единица. Преодоляването на този парадокс е свързано с появата на ирационалните числа (даже наименованието им показва колко *неразумни* са изглеждали те за древните гърци).

Втората криза причинила доста проблеми на математиците от 17-ти и 18-ти век във връзка с т. нар. *инфинитезисмални* (или *безкрайно малки*) величини. Парадоксът (да се приемат тези величини за нула и в същото време за различни от нула) бил разрешен от Коши със създаването на теорията за границите.

Последната (засега) криза (19-и – 20-и век) била толкова силна, че разклатила един от основните стълбове на математиката. Именитият немски логик Фреге тъкмо завършил книгата *Основи на аритметиката* и вярвал, че е представил в нея съдържателна теория на множествата, която да послужи за база на математиката. Книгата вече била приета за печат, когато Фреге получил писмо от Ръсел, в което му обръщал внимание върху следния парадокс на множествата: *Да разгледаме множеството от всички множества, които не принадлежат на себе си. Това множество принадлежи ли на себе си?* Както и да отговорите, ще стигнете до противоречие [1]. За да направи този парадокс разбираем за по-широка аудитория, Ръсел го формулирал по следния начин: *Ако един бръснар може да бръсне само онези, които не могат да се бръснат сами, може ли той да се обръсне?* (Фиг. 4). В своята теория на множествата Фреге позволявал съществуването на множество от всички множества, които не принадлежат на себе си. Както станало ясно от писмото на Ръсел, такова множество е противоречиво. Разбира се, Фреге не бил особено доволен (меко казано), но

според Ръсел *благодарение на стремежа да се преодолеят парадоксите математиката станала по-логична, а логиката – по-математична...*

В своята *теория на типовете* Ръсел направил решителна стъпка за разрешаване на парадоксите. Той систематизирал множествата в *йерархия на типовете* по такъв начин, че не било допустимо да се каже, че едно множеството принадлежи (не принадлежи) на себе си. По такъв начин той елиминирал противоречието.

Накратко, винаги когато математиката изпитвала сериозна криза, била спасявана от нова идея, която възвръщала авторитета ѝ на *непогрешима* наука. Ето защо не бива да се страхуваме от парадоксите, а дори трябва да ги търсим с надеждата *да разцъфне* красива нова теория.

За да не остане непълен прегледът на математическите постижения, свързани с парадоксите, да припомним какво се крие зад прочутата *теорема* на Курт Гьодел за *непълнотата*. Можем да си я представим като вариант на парадокса на Епименид в чисто математически термини. Нека да разгледаме фразата: *Това твърдение не може да бъде доказано (т.е. то е недоказуемо)*. Ако твърдението е невярно, следва, че то може да бъде доказано. А това означава, че е вярно и следователно е недоказуемо. Парадоксът се дължи на това, че понятието *доказуемо* не е абсолютно. С други думи, в математическата логика не се говори за *доказателство* в някакъв *абсолютен смисъл*, а за *доказуемост в дадена система*. Нека  $S$  е дадена формална система, за която понятието *доказуемост в  $S$*  е добре дефинирано и нека тя е коректна в смисъл, че *всяко доказуемо в  $S$  твърдение е вярно*. Тогава фразата: *Това твърдение е недоказуемо в системата  $S$*  не е парадокс, а едно вярно твърдение, което не е доказуемо в рамките на собствената си система. По този начин логикът Смялян (за когото стана дума по-горе) дава идея за теоремата на Гьодел за непълнотата (доказана през 1931 г.). Тази теорема може да се интерпретира като формален аналог на парадокса на лъжеца. По-точно Гьодел успява да построи такова твърдение, че нито то, нито неговото отрицание може да бъде доказано в дадената система.

Съжалявам, драги читатели, че нямаш достатъчно време, за да направя статията по-къса. Ако все пак сте стигнали дотук, бъдете спокойни, че това е последното изречение... Нали?

---

P. S. Когато попитах българския координатор на проекта *Math2Earth* дали одобрява парадоксалността на тази статия, той промърмори: *Можеше и да е по-лоша...* Естествено, бях възмутена: *И само толкова?* Отговорът дойде съвсем логично: *Щом настояваш – не можеше да бъде по-лоша...*

А сега е време за десерт с логически задачи. ☺

### 3. 2 Задачи и въпроси

**Зад. 10.** Помисли за вариации на парадокса на бръснаря (напр. замени бръснаря с готвач, художник, робот).

**Зад. 11.** Има много числа, които могат да бъдат наречени *интересни* поради техните свойства (например 7 е просто, 28 е свършено и т. н.)

- Мислиш ли, че всяко естествено число е *интересно*? Опитай се да докажеш това чрез допускане на противното. Какво можеш да кажеш за най-малкото число, което не е интересно?

- Модифицирай горното твърдението за *интересни* и *скупни хора*. Можем ли тогава да твърдим, че има скучни хора?

**Зад. 12.** Прочети внимателно следния диалог:

**Учителят:** *Кой скъса тази книга?*

**Беки:** *Не бях аз!*

**Том:** *Аз бях!*

**Джо:** *Само един от тях казва истината!*

Възможно ли е Джо да казва истината, ако знаем, че само един от тях, Том или Беки, е направил това?

**Зад. 13.** Парадокс ли е следният диалог?

**Платон:** *Това, което Сократ каже сега, ще бъде лъжа!*

**Сократ:** *Платон казва истината.*

**Зад. 14.** Тук има три неверни твърдения:

- $2+2 = 4$
- $3 \times 6 = 17$
- $8/4 = 2$
- $13-6 = 5$
- $5+4 = 9$

Кои са те?

**Зад. 15.** Обясни защо буквата О е била заменена от шестоъгълник в следното изречение [4]:

**Ако  $\pi = 3$ , това изречение би изглеждало така.**

**Зад. 16.** Напиши на едната страна на бяла карта следния текст:

ТВЪРДЕНИЕТО ОТ ДРУГАТА СТРАНА НА КАРТАТА Е ИСТИНА.

На обратната страна на картата напиши:

ТВЪРДЕНИЕТО ОТ ДРУГАТА СТРАНА НА КАРТАТА Е ЛЪЖА.

Покажи картата на приятели и ги попитай кое твърдение е вярно.

## Литература

- [1] Gardner, M. *Aha! Gotcha – paradoxes to puzzle and delight*, W.H. Freeman and Company, New York, 1995
- [2] Martin, R. L. ed. *The Paradox of the Liar*, New Haven: Yale University Press, 1970.
- [3] Goldenberg, E. P., Feurzeig, W. *Exploring Language with Logo*, The MIT Press, 1987, p. 170
- [4] Hofstadter, D.R. *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern*, Basic books, 1985

## Къде да научим повече

- Гаргов, Г. *Запомнени думи*, ИК „ПЕТ ПЛЮС“, София, 1997
- Смълян, Р. *Как се казва тази книга? Загадката на Дракула и други логически главоблъсканици*, Народна просвета, 1985
- Сотиров, В. *Логика 9. кл.*, Велес, 2002
- Сухотин, А. *Парадокси в науката*, Народна младеж, София, 1980
- Byers, W. *How Mathematicians Think, (Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics)*, Princeton University Press, 2007
- Gardner, M. *The Paradox of the Unexpected Hanging*, Chapter 1 in *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, New York: Simon&Schuster, 1968
- Gardner, M. *Free Will Revised*, Mathematical Games Department, *Scientific American*, July, 1973
- Gardner, M. *Mr. Apollinax Visits New York*, Chapter 11 in *New Mathematical Diversions from Scientific American*, New York: Simon&Schuster, 1966
- Kasner, E., Newman, J. R. Paradox Lost and Paradox Regained, *The World of Mathematics*, vol. 3, New York: Simon&Schuster, 1956
- Lewis, C. *The Annotated Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking Glass*. Martin Gardner, ed. New York:Clarkson N. Potter, Brabhall House, 1960.
- Quine W.V. *Paradox*, The Foundations of Mathematics, IV, 1962
- Smullyan, R. *This Book Needs No Title*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980
- Tarski, A. *Truth and Proof*, Scientific American, June 1969