

Ред и хаос в един модел от популационна биология

Нели Димитрова

1 Увод

Древните гърци разбирали под *хаос* ($\chi\alpha\omicron\sigma$) безкрайното празно пространство, което е съществувало преди възникването на Вселената. По-късно римляните наричали хаос първичната безформена маса, в която Създателят на света внесъл ред и хармония. Днес под хаос учените разбират сложно (непредсказуемо) поведение на една система във времето. В настоящата тема ще се опитаме да разбулим някои от тайните на това понятие с помощта на един прост модел от популационната биология.

Целта на математическото моделиране е да предсказва как дадена система се развива във времето. Пример за такава система е биологична популация с начален брой от x_0 индивиди. Основният въпрос, който си задават специалистите, е при дадено x_0 какво може да се каже за поведението на популацията в дългосрочен план? Дали с изменението на времето популацията ще намалява и клони към нула, водейки до изчезване на вида? Или с времето популацията ще се увеличава неограничено, което означава пренаселване на даден район? Или популацията ще се изменя и колебае периодично или дори по-сложно (хаотично)?

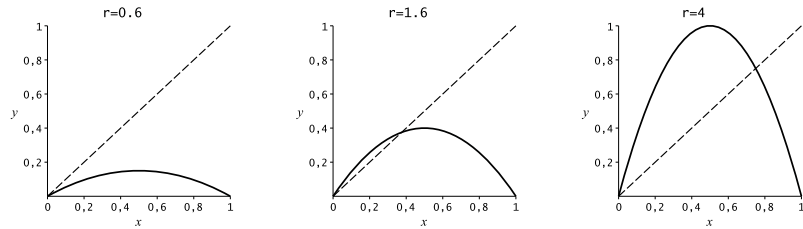
Тази разработка е предназначена за читатели, които обичат предизвикателствата от прилагане на математиката върху реални задачи. Добра предпоставка за нейното разбиране е умението да се решават квадратни уравнения, зависещи от параметър, както и намирането на производни на полиноми. Умения за работа със софтуерни среди, като например системи за компютърна алгебра, също биха допринесли за по-доброто осмисляне на материала.

2 Дискретен логистичен модел на растеж на популация

Математически модел на растеж на една биологична популация наричаме правилото, което, приложено върху дадената популация, позволява да се предскаже нейното развитие във времето. Времето ще измерваме в конкретни единици $n = 0, 1, 2, \dots$ (години, месеци, дни, часове, минути и т. н.). Размерът на популацията в момента n ще измерваме с броя на индивидите y_n .

Количеството на дадена популация зависи от множество фактори като например наличие на храна, място, климат, конкурентна борба и т. н., които най-общо ще наричаме жизнена среда. Един от първите модели на развитие на дадена популация е предложен от белгийския математик *Пиер Франсоа Верхълст* (*Pierre François Verhulst*) през 1845 г. Верхълст предполага, че жизнената среда може да поддържа максимално количество популация Y . Ако размерът на популацията y_n в момента n е по-малък от Y , популацията ще расте; ако y_n е по-голямо от Y , популацията трябва да намалява. Да положим $z_n = y_n/Y$; тогава за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$, z_n ще се изменя между 0 и 1. Нека скоростта, с която популацията расте или намалява от момента n до следващия момент $n + 1$, се дава с частното $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$. Верхълст предполага, че скоростта на растеж е пропорционална на $1 - z_n$; последният израз може да се интерпретира като тази част от жизнената среда, която все още не е използвана от популацията до момента n . Въвеждайки коефициент на пропорционалност q , който не зависи от n , получаваме равенството

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = q(1 - z_n).$$



Фигура 1: Графики на логистичната функция $y = f_r(x)$ за различни стойности на r

Като решим последното уравнение относно z_{n+1} стигаме до *дискретния модел на Верхълст*

$$z_{n+1} = z_n + qz_n(1 - z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Ще представим модела (1) в друга форма, която е по-проста и по-подходяща за изследване. С помощта на полагането $x_n = \frac{q}{1+q}z_n$ и $r = 1 + q$ получаваме

$$x_{n+1} = \frac{q}{1+q}z_{n+1} = \frac{q}{1+q}(z_n + qz_n(1 - z_n)) = (1+q) \cdot \frac{q}{1+q}z_n \cdot \left(1 - \frac{q}{1+q}z_n\right) = r x_n(1 - x_n).$$

Уравнението

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

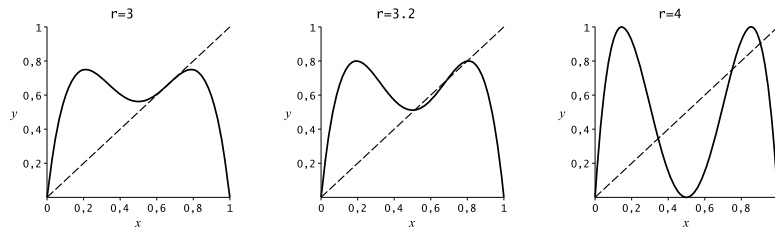
е известно като *дискретен логистичен модел*. Условието $0 \leq x_n \leq 1$ за всяко n води до неравенството $0 < r \leq 4$. Да разгледаме r като параметър и да дефинираме функцията

$$f_r(x) = r x(1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad r \in (0, 4].$$

Тогава (2) може да се представи във вида

$$x_{n+1} = f_r(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функцията f_r се нарича *логистична функция*. Фигура 1 показва графики на $y = f_r(x)$ за различни стойности на параметъра r ; с пунктир навсякъде е изобразена и графиката на правата $y = x$.

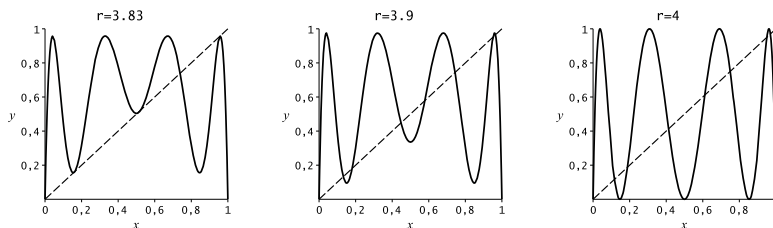


Фигура 2: Графики на $y = f_r^2(x)$ за различни стойности на r

Нека $x \in [0, 1]$ е произволна точка. Да дефинираме

$$f_r^1(x) = f_r(x), \quad f_r^2(x) = f_r(f_r(x)), \quad f_r^3(x) = f_r(f_r^2(x)), \quad \dots, \quad f_r^n(x) = f_r(f_r^{n-1}(x)), \quad \dots$$

Фигури 2 и 3 показват съответно графики на $y = f_r^2(x)$ и на $y = f_r^3(x)$ за различни стойности на $r \geq 3$, както и на правата $y = x$.



Фигура 3: Графики на $y = f_r^3(x)$ за различни стойности на r

За $x_0 \in [0, 1]$ можем да запишем $x_1 = f_r^1(x_0)$, $x_2 = f_r^2(x_0)$, $x_3 = f_r^3(x_0)$, \dots , $x_n = f_r^n(x_0)$, \dots

Редицата от точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ се нарича *орбита* на x_0 с f_r ; първата точка x_0 се нарича *начална стойност* или *начална точка* на орбитата.

Нашата цел е да разберем структурата на орбитата на произволно $x_0 \in (0, 1)$ и за достатъчно големи n , без да е необходимо всеки път последователно да пресмятаме членовете x_1, x_2, \dots, x_n . Това е, което специалистите наричат *предсказване на модела в дългосрочен план*.

3 Графично представяне на орбити

Точка x , за която е изпълнено равенството $f_r(x) = x$, се нарича *неподвижна точка* на f_r . Графически, неподвижните точки са пресечните точки на графиките на $y = x$ и $y = f_r(x)$.

Точка x , за която е изпълнено $f_r^2(x) = x$, но $f_r(x) \neq x$, се нарича *точка с период 2* или *2-периодична точка* на f_r . Графически, 2-периодичните точки са пресечни точки на графиките на $y = x$ и $y = f_r^2(x)$.

Точка x , за която $f_r^n(x) = x$ и n е най-малкото такова естествено число, се нарича *точка с период n* или *n -периодична точка* на f_r . Графически, n -периодичните точки са пресечни точки на графиките на $y = x$ и $y = f_r^n(x)$.

Да предположим, че началната стойност x_0 е неподвижна точка на f_r , т. е. $f_r(x_0) = x_0$. Тогава ще имаме

$$x_1 = f_r(x_0) = x_0, \quad x_2 = f_r(x_1) = f_r(x_0) = x_0, \quad \dots, \quad x_n = f_r(x_{n-1}) = x_0, \quad \dots$$

Орбитата на x_0 се задава с редицата $x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$, която не се изменя във времето. Популацията е предсказуема в дългосрочен план.

Нека сега да предположим, че началната стойност x_0 е 2-периодична точка на f_r , т. е. $f_r^2(x_0) = x_0$, но $f_r(x_0) \neq x_0$. Имаме

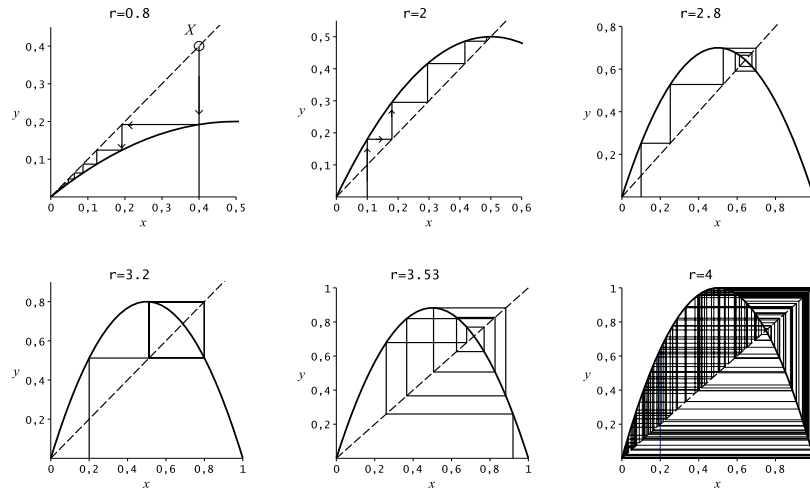
$$\begin{aligned} x_1 &= f_r(x_0), \quad x_2 = f_r(x_1) = f_r^2(x_0) = x_0, \quad x_3 = f_r(x_2) = f_r(x_0) = x_1, \\ x_4 &= f_r(x_3) = f_r(x_1) = x_0, \quad x_5 = f_r(x_4) = f_r(x_0) = x_1, \dots \end{aligned}$$

и орбитата на x_0 е $x_0, x_1, x_0, x_1, \dots, x_0, x_1, \dots$; тя образува *цикъл с период 2*, който ще наричаме още *2-периодичен цикъл* или *2-периодична орбита*. Популацията е предсказуема, въпреки че осцилира между две стойности през цялото време.

Задача 1. Запишете орбитата, която съответства на 3-периодична точка x_0 . Как изглежда орбитата, когато x_0 е n -периодична точка ($n > 3$)?

Да разгледаме случая, когато началната стойност x_0 не е неподвижна точка на f_r . Един подходящ начин да визуализираме орбитата на x_0 е да използваме *графични итерации*. Да

разгледаме Фигура 4 в случая $r = 0.8$. Тръгвайки от точка $X = (x_0, x_0)$ върху графиката на правата $y = x$, построяваме вертикална права към графиката на $y = f_r(x)$, която пресича графиката в $(x_0, f_r(x_0)) = (x_0, x_1)$. После строим хоризонтална права обратно към графиката на $y = x$, която пресича последната в точката (x_1, x_1) . Повтаряме процедурата с (x_1, x_1) . Тази техника работи, защото точките върху правата $y = x$ са еднакво отдалечени от двете координатни оси x и y .



Фигура 4: Орбити за различни стойности на r

На Фигура 4 са показани орбити на различни начални точки за различни стойности на r . В случая $r = 0.8$, 0 е единствената неподвижна точка на f_r . Ако изберем за начална точка $x_0 = 0.4$, нейната орбита ще се приближава към 0 , когато n расте.

Задача 2. За $r = 0.8$ пресметнете няколко точки от орбитата с помощта на калкулатор или подходящ софтуер, като всеки път избирате различни начални точки $x_0 \in (0, 1)$.

Както сами се убедихте, резултатът е един и същ: всички орбити клонят към 0 . Неподвижната точка 0 се нарича *привличаща* или *устойчива неподвижна точка*. В случая $r = 2$ (Фигура 4) f_r има две неподвижни точки, $\zeta_0 = 0$ и $\zeta_1 = 0.5$. Всяка една от тях действа по различен начин върху орбитите. Можете сами да се убедите, че всички начални точки, дори такива, които са близо до $\zeta_0 = 0$, се отдалечават от 0 , а се привличат от $\zeta_1 = 0.5$, когато n расте. В този случай ζ_1 е привличащата точка, докато ζ_0 се нарича *отблъскваща* или *неустойчива неподвижна точка*. При $r = 2.8$ (Фигура 4) орбитата на $x_0 = 0.1$ клони спираловидно към устойчивата неподвижна точка $\zeta_1 \approx 0.6$.

Случаят $r = 3.2$ (Фигура 4) е различен. Неподвижните точки на f_r са $\zeta_0 = 0$ и $\zeta_1 \approx 0.7$. Графичните итерации показват, че ζ_0 и ζ_1 са отблъскващи неподвижни точки за всяка начална стойност $x_0 \in (0, 1)$. Къде отиват орбитите в този случай?

Задача 3. С помощта на калкулатор или подходящ софтуер се убедете, че при $r = 3.2$ и при всеки избор на началната точка $x_0 \in (0, 1)$ орбитите осцилират между две стойности, $\zeta_2 \approx 0.5$ и $\zeta_3 \approx 0.8$.

Такава орбита се нарича *устойчив 2-периодичен цикъл*. За $r = 3.53$ (Фигура 4) орбитата се нарича *устойчив 4-периодичен цикъл*, тъй като например началната точка $x_0 = 0.2$ се привлича от 4-периодичните точки $\{\zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7\}$, където $\zeta_4 \approx 0.4$, $\zeta_5 \approx 0.5$, $\zeta_6 \approx 0.8$ и $\zeta_7 \approx 0.9$.

Примерите и графичните визуализации на Фигура 4 показват, че изменението на параметъра r води до твърде различно поведение на логистичния модел: раждат се нови устойчиви неподвижни точки, появяват се орбити (цикли) с периоди 2 и 4. Важно е да отбележим, че именно съществуването на устойчиви неподвижни точки и устойчиви периодични орбити означава предсказуемост на популацията в дългосрочен план. Нашата интуиция ни подсказва, че с нарастването на r могат да се появят орбити с по-висок период като 8-периодични, 16-периодични и т. н. Докога ще продължи този ефект на удвояване на периода? Какво ще се случи, ако той евентуално спре?

Преди да отговорим на тези въпроси, да разгледаме случая $r = 4$ на Фигура 4. Орбитата на $x_0 = 0.2$ показва сложно поведение: тя изглежда така, сякаш никога няма да намери покой и като че ли запълва целия интервал $[0, 1]$, без да може да бъде предсказано поведението ѝ. Такова поведение на орбитите се нарича *хаос*.

4 Устойчивост и бифуркации на неподвижни точки

За да намерим неподвижните точки на f_r , трябва да решим уравнението $f_r(x) = x$ за $x \in [0, 1]$, където r е параметър, $r \in (0, 4]$. Очевидно $f_r(x) = x$ е еквивалентно на $rx(1-x) = x$.

Задача 4. Покажете, че f_r има две неподвижни точки в $[0, 1]$, $\zeta_0 = 0$ и $\zeta_1 = 1 - \frac{1}{r}$.

Решението на Задача 4 показва, че логистичната функция f_r има единствена неподвижна точка $\zeta_0 = 0$ за $r \in (0, 1)$ и две неподвижни точки за $r \geq 1$; при $r = 1$ двете неподвижни точки се сливат, $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$.

Тест за устойчивост на неподвижни точки. Една неподвижна точка ζ на f_r е *привличаща* или *устойчива*, ако производната на $f_r(x)$, пресметната в ζ , по абсолютна стойност е по-малка от 1, т. е. ако $|f_r'(\zeta)| < 1$. Неподвижната точка ζ на f_r е *отблъскваща* или *неустойчива*, ако е изпълнено $|f_r'(\zeta)| > 1$.

Задача 5. Намерете производната $f_r'(x)$ на логистичната функция $f_r(x)$ и покажете, че $f_r'(\zeta_0) = r(1 - 2\zeta_0) = r$, $f_r'(\zeta_1) = r(1 - 2\zeta_1) = 2 - r$. Докажете, че $|f_r'(\zeta_0)| < 1$ при $0 < r < 1$ и че $|f_r'(\zeta_1)| < 1$ за $1 < r < 3$.

Сега можем да направим извода, че за $r \in (0, 1)$ неподвижната точка ζ_0 е привличаща; за $r \in (1, 3)$ неподвижната точка ζ_1 привличаща, а ζ_0 е отблъскваща (Фигура 4, орбитите за $r = 0.8$, $r = 2$ и $r = 2.8$).

Има един случай, който не се покрива от теста за устойчивост, именно случаят $|f_r'(\zeta)| = 1$ за коя да е неподвижна точка ζ . При $r = 1$ имаме $\zeta_0 = \zeta_1$ и $f_r'(\zeta_0) = 1$, т. е. ζ_0 не е нито устойчива, нито неустойчива съгласно горния тест. За $r = 1$ от ζ_0 се е родила нова неподвижна точка ζ_1 по такъв начин, че при $r > 1$ новата точка ζ_1 става устойчива, а старата неподвижна точка ζ_0 , която продължава да съществува, вече е станала неустойчива. Казваме, че в $r = 1$ е настъпила *бифуркация (разклонение)* на неподвижната точка ζ_0 .

Сега да предположим, че $r > 3$, и да разгледаме f_r^2 . Неподвижните точки на f_r^2 са решения на уравнението $f_r^2(x) = x$, което е еквивалентно на $x(1-r+rx)(r^2x^2 - r(r+1)x + r+1) = 0$. Очевидно неподвижните точки $\zeta_0 = 0$ и ζ_1 на f_r са неподвижни точки и на $f_r^2(x)$. За да намерим 2-периодичните точки на f_r , трябва да решим (относно x) квадратното уравнение

$$r^2x^2 - r(r+1)x + r+1 = 0. \quad (3)$$

Задача 6. Покажете, че за $r > 3$ съществуват два реални положителни корена ζ_2 и ζ_3 на (3), където

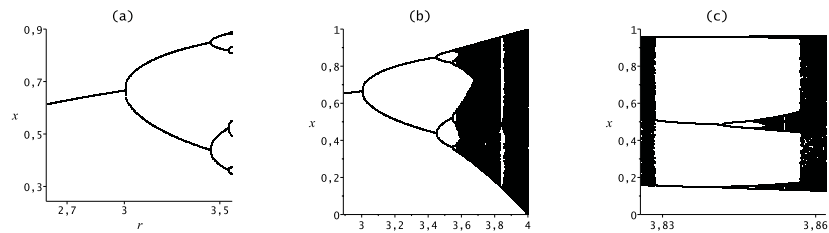
$$\zeta_2 = \frac{1}{2r} \left(r+1 - \sqrt{(r+1)(r-3)} \right), \quad \zeta_3 = \frac{1}{2r} \left(r+1 + \sqrt{(r+1)(r-3)} \right). \quad (4)$$

Задача 7. Покажете, че $f_r(\zeta_2) = \zeta_3$ и $f_r(\zeta_3) = \zeta_2$.

От (4) лесно се вижда, че за $r = 3$ двата корена съвпадат, $\zeta_2 = \zeta_3 = \frac{2}{3}$; нещо повече, за тази стойност на параметъра имаме $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_1$ и $f'_r(\zeta_1) = -1$. Следователно при $r = 3$, ζ_1 не е нито устойчива, нито неустойчива съгласно нашия тест; в тази критична стойност за r от ζ_1 се раждат двете нови точки ζ_2 и ζ_3 . Това отново е *разклонение* на неподвижната точка ζ_1 , което се нарича *бифуркация с удвояване на периода*. Да положим $r_1 = 3$.

Задача 8. Намерете производната на $f_r^2(x)$ относно x и покажете, че $|(f_r^2)'(\zeta_2)| = |(f_r^2)'(\zeta_3)| = |f'_r(\zeta_2)| \times |f'_r(\zeta_3)| < 1$ за $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

Двупериодичните точки ζ_2 и ζ_3 са привличащи за $3 < r < 1 + \sqrt{6}$; за тези стойности на r предишните две точки ζ_0 и ζ_1 са отблъскващи. При $r = r_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ неподвижните точки ζ_2 и ζ_3 не са нито устойчиви, нито неустойчиви. Можем да очакваме, че в r_2 ще се родят нови неподвижни точки, а именно 4-периодичните точки $\zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$ и ζ_7 , които се разклоняват две по две от ζ_2 и ζ_3 . С помощта на специфични изчислителни техники може да се пресметне следваща бифуркационна стойност $r_3 \approx 3.54$ на параметъра, в която се появяват 8-периодични точки по такъв начин, че всяка една от $\zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$ и ζ_7 се разклонява в две нови точки; при това 8-периодичните точки са устойчиви, докато r достигне следващата си бифуркационна стойност $r_4 \approx 3.56$, където се появяват 16-периодични точки. Фигура 5(a) показва устойчивите клонове на неподвижните точки, на 2-периодичните, а също и на 2^2 - и 2^3 -периодичните точки на f_r като функции на r .



Фигура 5: (a), (b) Бифуркационни диаграми; (c) 3-периодичния прозорец

Изглежда естествено да приемем, че съществува безкрайна редица от бифуркационни стойности на параметъра

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{k-1}, r_k, r_{k+1} \dots \tag{5}$$

такава, че във всяко r_k устойчивите 2^k -периодични точки на f_{r_k} се сменят с 2^{k+1} -периодични точки; предишните, с по-нисък период точки, продължават да съществуват, но като неустойчиви. При компютърни симулации са различни само краен брой цикли поради крайната изчислителна точност, с която работят компютрите. Редицата (5) е сходяща, т. е. съществува число $r^* \in (3, 4)$, така че r_k клони към r^* , когато k расте неограничено; $r^* \approx 3.569944 \dots$

Да разгледаме случая $r = 4$ и да положим $f_4(x) = 4x(1 - x)$. От графиките на f_4, f_4^2 и f_4^3 съответно на Фигури 1, 2 и 3 можем да заключим, че f_4 има две неподвижни точки, 0 и $3/4$, и двете неустойчиви (проверете!); f_4^2 има 2^2 неподвижни точки, f_4^3 има 2^3 неподвижни точки, и по индукция f_4^n притежава 2^n неподвижни точки, всички в интервала $[0, 1]$. Четирите неподвижни точки на f_4^2 включват 0 и $3/4$ и още двойка 2-периодични точки; последните могат да се намерят с помощта на формули (4) за $r = 4$; 2-периодичните точки са неустойчиви. Сред осемте неподвижни точки на f_4^3 две са 0 и $3/4$, а останалите 6 образуват два цикъла с период 3; сред 16-те неподвижни точки на f_4^4 има две неподвижни точки, две 2-периодични точки и 12 точки с период 4. В общия случай за всяко естествено число n съществува орбита с период n . Обаче ако изберем произволна начална точка в $(0, 1)$ и изобразим орбитата с f_4 , трудно ще забележим някой от тези цикли (Фигура 4, $r = 4$).

5 Пътища към хаоса

Прецизни числени пресмятания показват, че за $r \leq r^*$ орбитата на коя да е точка $x_0 \in (0, 1)$ е предсказуема в следния смисъл. Да вземем две начални стойности x_0 и \bar{x}_0 , такива че $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$ за произволно малко $\varepsilon > 0$. Тогава след достатъчно голямо време n ще имаме $f_r^n(x_0) \approx f_r^n(\bar{x}_0)$, т. е. орбитите на *близки* начални точки остават *близки*. Казваме, че за $r \leq r^*$ логистичната функция f_r няма *чувствителна зависимост от начални условия*.

Функцията $f_4(x)$ показва чувствителна зависимост от начални условия. По-конкретно, за всяка начална точка $x_0 \in (0, 1)$ и произволно избрано $\varepsilon > 0$ съществува втора точка \bar{x}_0 , такава че $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$, и съществува разстояние $d > 0$, така че е изпълнено неравенството $|f_4^n(x_0) - f_4^n(\bar{x}_0)| \geq d$ за достатъчно големи n . С други думи (при $r = 4$) двете орбити на x_0 и \bar{x}_0 ще бъдат отдалечени поне на d единици една от друга след достатъчно голямо време n . Орбитата на x_0 се нарича *хаотична орбита*. Една хаотична орбита никога не може да намери устойчива неподвижна точка или устойчив цикъл, които да я привлекат.

Поведението на логистичния модел е предсказуемо за $r \leq r^*$, а за $r = 4$ е непредсказуемо или хаотично. Нашата интуиция ни подсказва, че в интервала $r^* < r < 4$ ще имаме преход от ред към хаос. Фигура 5(b) показва интересни аспекти на този преход. За $r > r^*$ орбитите сякаш запълват подинтервали (множества) на $[0, 1]$ или целия интервал $[0, 1]$ (за $r = 4$). Тези множества имат специална (фрактална) структура. Една от техните характеристики е, че те внезапно се появяват или изчезват, изместени от *бели ивици (прозорци)*. Най-широкият такъв прозорец е показан увеличен на Фигура 5(c) за r между $1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ и 3.85 . Той се нарича *3-периодичен прозорец*, тъй като при $r = 1 + \sqrt{8}$ се появяват 3-периодични точки, последвани от бифуркации с удвояване на периода. Важна теорема, доказана от Шарковски (1964 г.) твърди, че ако за някое \bar{r} съществува 3-периодична орбита на $f_{\bar{r}}$, то за $r > \bar{r}$ съществува хаотична орбита на логистичната функция.

Къде да научим повече

- Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. *Fractals for the Classroom. Part One: Introduction to Fractals and Chaos*, Springer, New York, 1992.
- Панчев, Ст. *Теория на хаоса*, Академично издателство “Проф. Марин Дринов”, София, 2001.