

Rumrejser med 1 g acceleration

Ján Beňačka

1 Introduktion

Inden for en overskuelig fremtid vil civilisationer som vores være nødt til at fremskaffe råmaterialer fra det ydre rum, hvis det nuværende forbrug skal opretholdes. Scenariet er dette: En raket accelererer et rumskib op til en passende marchhastighed, raketten slukkes og mandskabet vil befinde sig i vægtløs tilstand indtil de er fremme ved målet og der bremses ned til en passende landingshastighed.

På en sådan rejse vil man være længe undervejs. Jordan – Mars retur ånsås at vare 520 dage [1]. En så lang periode levet i vægtløshed vil være ødelæggende for mandskabets helbred. Men man må jo kunne undgå vægtløsheden ved at lade rejsen foregå med acceleration hhv. deceleration på f.eks. 1 g hvorved man simulerer Jordens tyngdefelt. I dette afsnit undersøges sådanne rejser til hhv. Månen, Mars og Pluto. Spørgsmål i fokus er: hvor lang tid vil en sådan rejse vare og hvor store hastigheder kommer vi op på? De kan besvares med stof på folkeskoleniveau og denne del af undersøgelsen antyder at udnyttelsen af planeterne kan begynde snart.

Men vi skal også se på rumfartøjet: Hvad skal motoren kunne præstere? Hvad er energiforbruget? Kan det overhovedet lade sig gøre at foretage sådanne rejser? Derfor beregner vi udstødningshastighed og energibehov. Det er en problemstilling der behandles i teorien for bevægelse af legemer med varierende masser og kræver infinitesimalregning. Denne del af emnet er rettet mod studerende med interesse for raketvidenskab og rumteknologi og med grundlæggende viden om integral- og differentialregning på gymnasieniveau.



Fig. 1 Affyring af rumfærge

2 Pensumpunkter dækket af dette afsnit

2.1 Matematikpensum

- Manipulation af symbolholdige udtryk indeholdende brøker og eksponenter
- Differential- og integralregning
- Løsning af simple differentialligninger

2.2 Fysikpensum

- Bevægelse med constant acceleration
- Mekanisk arbejde
- Omsætning mellem forskellige energiformer

3 Undersøgelse af problemstillingerne

3.1 Rejsens varighed og den maksimale hastighed der opnås

Vi antager at vores rumskib bevæger sig ad en ret linje. Det starter med hastighed 0 og accelererer 1 g på den første halvdel af rejsen. Derpå slukkes motoren, den drejes 180° (det gøres så hurtigt som muligt og vi ser bort fra den tid der går med det) og tændes igen så der nu bremses med en deceleration på 1 g. Kald hele rejsens varighed t_T og den tilbagelagte distance d_T . Accelerationsperioden varer dermed $t_T/2$ og i løbet af denne periode kommer vi op på hastigheden v_T medens der er tilbagelagt distancen $d_T/2$ givet ved

$$v_T = g \frac{t_T}{2}, \quad \frac{d_T}{2} = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_T}{2} \right)^2 \quad (1)$$

Decelerationsperioden er af samme længde og der tilbagelægges den samme distance så den samlede rejses længde er

$$d_T = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_T}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} g \left(\frac{t_T}{2} \right)^2 = \frac{g t_T^2}{4} \quad (2)$$

Heraf fås

$$t_T = 2 \sqrt{\frac{d_T}{g}} \quad (3)$$

og følgelig er

$$v_T = \sqrt{g d_T} \quad (4)$$

Vi finder at

$t_T \approx 3,5$ timer, $v_T \approx 61$ km/s ved en Jord – Måne afstand på $3,8 \times 10^5$ km [2]

$t_T \approx 2$ dage, $v_T \approx 858$ km/s ved en Jord – Mars afstand på $7,5 \times 10^7$ km [3] og

$t_T \approx 18$ dage, $v_T \approx 7542$ km/s ved en Jord – Pluto afstand på $5,8 \times 10^9$ km [4]

Værdierne af t_T virker interessante for de antyder at en udnyttelse af planeternes ressourcer ligger lige om hjørnet. Imidlertid ved vi endnu intet om rumskibet – hvilke krav skal motoren kunne honorere og hvor meget brændstof skal bruges?

3.2 Tsiolkovskys raketligning

Trykkraften der leveres af udstødningen fra en ideel raketmotor er givet ved ligningen [5]

$$F = v_v m_s \quad (5)$$

hvor m_s er den mængde raketbrændstof der forbrændes per sekund og udstødes af dyserne som varm luft og v_v er udstødningshastigheden, dvs. den relative hastighed af gassen i forhold til rumskibet. Antag at v_v er konstant og m_s er en funktion af tiden. Lad M betegne rumskibets masse til tid $t = 0$. Massen m til tid t er da givet ved

$$m = M - \int_0^t m_s(z) dz \quad (6)$$

Newtons lov giver nu, idet accelerationen er $1g$

$$v_v m_s = g \left(M - \int_0^t m_s(z) dz \right) \quad (7)$$

Differentieres med hensyn til tiden fås

$$v_v \frac{dm_s}{dt} = -gm_s \quad (8)$$

Separation af de variable med efterfølgende integration giver

$$m_s = Ce^{-\frac{g}{v_v}t} \quad (9)$$

hvor C er en konstant. Lad udstødningsraten være M_s til $t = 0$. Så er $C = M_s$ og

$$m_s = M_s e^{-\frac{g}{v_v}t} \quad (10)$$

Hvis $t = 0$ giver ligning (5)

$$gM = v_v M_s \quad (11)$$

hvoraf man får

$$M_s = \frac{gM}{v_v} \quad (12)$$

og dermed

$$m_s = \frac{gM}{v_v} e^{-\frac{g}{v_v}t} \quad (13)$$

Forbrændingstiden er t_T , så den samlede brændstoffmængde er

$$m_f = \int_0^{t_T} m_s dt = \frac{gM}{v_v} \int_0^{t_T} e^{-\frac{g}{v_v}t} dt = -M \left[e^{-\frac{g}{v_v}t} \right]_0^{t_T} = M \left(1 - e^{-\frac{g}{v_v}t_T} \right) \quad (14)$$

Den relative masse af brændstoffet ved start er

$$m_{fr} = \frac{m_f}{M} = 1 - e^{-\frac{g}{v_v}t_T} \quad (15)$$

hvoraf man får

$$t_T = -\frac{v_v}{g} \ln(1 - m_{fr}) \quad (16)$$

Da $0 < (1 - m_{fr}) < 1$ er $\ln(1 - m_{fr}) < 0$ og dermed $t_T > 0$. Hvis rumskibet accelererer hele tiden op til t_T vil slutfarten være

$$v_T = gt_T = -v_v \ln(1 - m_{fr}) \quad (17)$$

Omskrivning af ligning (17) og indsættelse M_0 for massen af rumskibet uden brændstof giver den fundamentale raketligning kendt som Tsiolkovsky ligningen [6]

$$v_T = -v_v \ln(1 - m_{fr}) = -v_v \ln\left(1 - \frac{m_f}{M}\right) = -v_v \ln\left(\frac{M - m_f}{M}\right) = -v_v \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = v_v \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) \quad (18)$$

3.3 Minimal udstødningshastighed for raketmotoren

Rumskibet i vores model accelererer i perioden $t_T/2$ og når en maksimum fart på (se ligning (1))

$$v_T = g \frac{t_T}{2} = -\frac{v_v}{2} \ln(1 - m_{fr}) \quad (19)$$

Så decelererer rumskibet. Den samlede distance som motoren arbejder i er (Se ligning (2))

$$d_T = \frac{g t_T^2}{4} = \frac{v_v^2}{4g} \ln^2(1 - m_{fr}) \quad (20)$$

Derfor er

$$v_v = -2 \frac{\sqrt{g d_T}}{\ln(1 - m_{fr})} \quad (21)$$

Minimal udstødningsfart ved forskellige relative brændstofmasser ses i Tabel 1

m_{fr} (%)	v_v (km/s)		
	Jord-Måne	Jord-Mars	Jord-Pluto
99	27	370	3300
90	53	750	6600
50	180	2500	22 000

Tabel 1 Minimal udstødningshastighed for raketmotor

Eksisterende raketmotorer har maksimum $v_v \approx 4,4$ km/s [7]. Ved $m_{fr} = 90$ % ligningerne (16, 19, 20) giver $t_T = 1000$ s, $v_T \approx 5$ km/s, $d_T \approx 2700$ km. Det er en alt for kort distance til at muliggøre rumrejser af den type der er omtalt ovenfor. Det vil sige at 1g rumrejser er noget der hører til i en fremtid hvor ny raket teknologi er udviklet [8,9].

3.4 Raketmotorens energiforbrug

Det arbejde der udføres af motoren under forbrændingen i tiden t_T er

$$W = \int_0^s \mathbf{F} ds = \int_0^{t_T} \mathbf{F} v dt = \int_0^{t_T} F v dt \quad (22)$$

Udstødningen fra motoren er givet ved ligningerne (5, 13) og rumskibets fart er $v = gt$, hvoraf

$$W = g^2 M \int_0^{t_T} t e^{-\frac{g}{v_v} t} dt = M v_v^2 \left[1 - \left(1 + \frac{g t_T}{v_v} \right) e^{-\frac{g t_T}{v_v}} \right] \quad (23)$$

Den totale masse m_f af brændstoffet er givet ved ligning (14). Den nødvendige energi for en masseenhed af brændstof, dvs. brændstof energidensiteten er dermed

$$W_{fu} = \frac{W}{m_f} = v_v^2 \frac{1 - \left(1 + \frac{g t_T}{v_v} \right) e^{-\frac{g t_T}{v_v}}}{1 - e^{-\frac{g t_T}{v_v}}} = 4g d_T \frac{m_{fr} + (1 - m_{fr}) \ln(1 - m_{fr})}{m_{fr} \ln^2(1 - m_{fr})} \quad (24)$$

Brændstoffets minimale energitæthed ved forskellige relative brændstofmasser fremgår af Tabel 2

m_{fr} (%)	W_{fu} (J/kg)		
	Jord-Måne	Jord-Mars	Jord-Pluto
99	$6,7 \times 10^8$	$1,3 \times 10^{11}$	$1,0 \times 10^{13}$
90	$2,1 \times 10^9$	$4,1 \times 10^{11}$	$3,2 \times 10^{13}$
50	$9,5 \times 10^9$	$1,9 \times 10^{12}$	$1,5 \times 10^{14}$

Tabel 2 Brændstoffets minimale energitæthed

Benzin har den største energitæthed af alle fossile drivmidler med en værdi på $W_{fu} \approx 4,7 \times 10^7$ J/kg [10]. Flydende brint har den maksimale værdi af alle flydende drivmidler med værdien $W_{fu} \approx 1,4 \times 10^8$ J/kg. Energitætheden for fissionsdrivmiddel som U-235 er $W_{fu} \approx 7,7 \times 10^{13}$ J/kg. Energitætheden af brint som fusionært drivmiddel er $W_{fu} \approx 3,0 \times 10^{14}$ J/kg.

Vi ser at kun fissions- og fusionsmaskiner kan muliggøre rejserne. Slutningsvis giver formlen $E = mc^2$ $W_{fu} \approx 9 \times 10^{16}$ J/kg. Ligning (24) giver dermed $m_{fr} \approx 0,13$ % ved Jord-Pluto afstand hvilket svarer til en relativ masse på cirka 2 liter benzin til en bil.

3.5 Konklusioner

Forudsætninger for at tilbagelægge Jord – Måne, Jord – Mars og Jord – Pluto rejser ved 1 g acceleration (halvdelen af turen med 1 g og anden halvdel af turen med -1g) hvis brændstoffet udgør 50% af rumskibets begyndelsesmasse er:

- 1) raketmotoren udstøder med farten 180 km/s, 2500 km/s hhv. 22500 km/s
- 2) brændstof energitæthed 10 GJ/kg, 2 TJ/kg hhv 150 TJ/kg som kun kan opnås ved fissions- eller fusionsprocesser.

Referencer

- [1] <http://www.imbp.ru/Mars500/Mars500-e.html> (July 2, 2007)
- [2] Moon. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:36, July 2, 2007, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moon&oldid=141805733>
- [3] Mars. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:38, July 2, 2007, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mars&oldid=141969984> [2]
- [4] Pluto. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:38, July 2, 2007, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pluto&oldid=141528650>
- [5] <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/rockth.html> (July 2, 2007)
- [6] Tsiolkovsky rocket equation. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:33, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tsiolkovsky_rocket_equation&oldid=140956051
- [7] Space Shuttle main engine. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:39, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Space_Shuttle_main_engine&oldid=141241061
- [8] <http://www.grc.nasa.gov/WWW/ion/overview/overview.htm>. Retrieved 10:39, July 2, 2007)
- [9] Rocket engine. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:40, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rocket_engine&oldid=141073495
- [10] Energy density. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:42, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_density