Navigazione tramite numeri e divertimento

Vladimir Georgiev

1 Introduzione

La novità principale nel nostro approccio e l'avvicinamento del lavoro dei nostri Lab ai problemi della vita reale tramite la parte "problem posing" nella prima fase delle loro attività . Più precisamente, ogni squadra (Lab matematico) poteva proporre un problema matematico e tutte le squadre erano state invitate a presentare un problema della vita reale. Il nostro interesse era particolarmente orientato verso i campi di navigazione e astronomia.

Una delle difficoltà tipiche veniva dal fatto che era complicato definire la condizione di valida proposta del problema o richiedere unicità della soluzione. La flessibilità delle regole in questa fase permetteva di proporre bellissimi problemi o di trattare situazioni complicate senza sapere a priori se la soluzione si poteva trovare.

Ogni squadra era composta da 5-7 studenti e 1 professore. Questo Lab specifico doveva inventare una situazione interessante della vita reale e di proporre un problema matematico collegato alla situazione.

Un altro gruppo di 6-7 professori di Matematica dell'Università costituiva la Commissione della gara e il compito principale della Commissione nella prima fase era di modificare il testo dei quesiti dove le spiegazioni non erano chiare.

2 Contenuto del programma svolto in questa unità

- Teoria dei numeri
- Analisi: proprietà delle successioni
- Combinatoria

3 Compiti e problemi

Mostreremo un esempio di un problema presentato in una maniera attrattiva. L'oggetto principale del problema era una successione particolare, descritta purtroppo in modo non ben chiaro. Formalmente, il problema non è collegato direttamente con l' argomento principale – Navigazione e Astronomia. Questo fatto implica che è difficile proporre problemi matematici su un argomento concreto della vita reale. Nonostante quello, il Lab della squadra è partito da un problema della teoria di numeri e poi è riuscita a interpretarlo come una piccola bellissima favola. All' inizio presentiamo il problema proposto nella forma originale e dopo vedremo le modifiche effettuate dalla Commissione.

3.1 Problema I: Come si trova il tesoro?

Il famosissimo pirata capitan Secante fù costretto, dopo una violenta tempesta, ad approdare su un'isola inesplorata. Mentre i suoi marinai provvedevano a riparare la nave, decise di esplorare l'entroterra, e esattamente al centro dell'atollo trovò un grossissimo forziere, chiuso da un pesante lucchetto a combinazione, che recava una targa d'ottone:

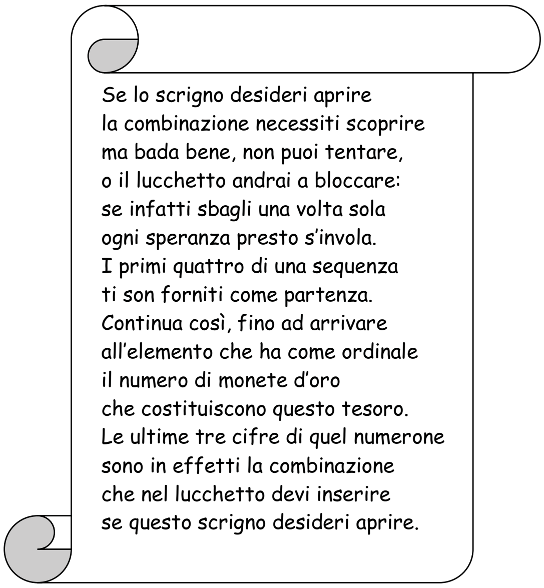

Fig. 1 vedi [1]

Più in basso il pirata legge i seguenti numeri:

5	0	123	22

Capitan Secante, più noto per le sue scorribande che per la sua intelligenza, decifra a malapena l'iscrizione, per provare subito ad inserire una combinazione a caso. Viene fermato appena in tempo dalle parole del suo nostromo, che gli dice "aspetti capitano! Forse sò che combinazione dobbiamo inserire. Posso aiutarla, ma a patto che spartiremo il bottino equamente". Su un fianco del forziere il capitano legge "Questo scrigno contiene monete d'oro in numero pari a 2009!". Il pirata, che non conosce il significato del punto esclamativo, risponde "Molto bene, ci divideremo il bottino, tuttavia, siccome io sono il capitano voglio almeno 1500 monete d'oro!" Il nostromo, molto più matematico del malvagio corsaro, acconsente ridendo sotto i baffi, e facendo due conti sulla sabbia in pochi minuti trova le ultime tre cifre del 2009!-esimo elemento della serie, e apre il forziere. Che combinazione ha immesso il nostromo?

E' una bellissima favola dove si cerca il codice del forziere. Sembra, che prima esisteva il problema matematico e poi la squadra ha inventato la favola. La difficoltà restava nel fatto che la successione non era definita rigorosamente. La Commissione ha modificato la versione inglese, dove la seguente definizione precisa della successione a_i si usa.

Capitan Secante, più noto per le sue scorribande che per la sua intelligenza, decifra a malapena l'iscrizione, per provare subito ad inserire una combinazione a caso. Viene fermato appena in tempo dalle parole del suo nostromo, che gli dice "Aspetti capitano! Forse so che combinazione dobbiamo inserire. Posso aiutarla, ma a patto che poi spartiremo il bottino equamente". Su un fianco del forziere il capitano legge "Questo scrigno contiene monete d'oro in numero pari a 2009!". Il pirata, che non conosce il significato del punto esclamativo, risponde "Molto bene, ci divideremo il bottino, tuttavia, siccome io sono il capitano voglio almeno 1500 monete d'oro!" Il nostromo, molto più matematico del malvagio corsaro, acconsente ridendo sotto i baffi, e facendo due conti sulla sabbia in pochi minuti trova la formula della successione a_i, dove a_i per i pari e' una somma di una progressione aritmetica con differenza ±1 e una successione geometrica di ratio 5 e poi trova le ultime tre cifre del 2009!-esimo elemento della serie, e apre il forziere. Che combinazione ha immesso il nostromo?

Per far capire il testo in inglese per tutte le squadre (bulgare , russe, italiane) la Commissione ha aggiunto referenze e link in Internet.

Presentiamo sotto alcune soluzioni.

4 Soluzioni

4.1 Soluzione del problema presentato della squadra Acutangoli (Livorno)

Si nota facilmente che:

$$123 = 5^3 - 2$$
$$22 = 5^2 - 3$$

proseguendo con questo ragionamento conviene scrivere:

$$5 = 5^1 - 0$$
$$0 = 5^0 - 1$$

da queste considerazioni si desume che la successione è:

$$\begin{cases} f(n) = 5^{n+1} - n \text{ per } n = 2k \\ f(n) = 5^{n-1} - n \text{ per } n = 2k-1 \end{cases}$$

con k numero naturale. Poichè la sequenza comincia con $n = 0$ e il valore di n aumenta ogni volta di un'unità, il $2009!$-esimo elemento della sequenza avrà $n = 2009! - 1$. Poichè inoltre $2009! - 1$ è dispari, dato che il fattoriale di ogni numero maggiore di 1 è multiplo di 2, la $f(n)$ da considerare è:

$$f(n) = 5^{n-1} - n$$

Sappiamo che 5^α=1000t+625, ovvero termina con 625, con α pari e maggiore di *3* (vedi nota); per noi $\alpha = n - 1 = (2009! - 1) - 1 = 2009! - 2$, che è proprio pari e maggiore di 3: quindi $5^{n-1} = 1000m + 625$.

Inoltre, dato che $2009!$ è certamente multiplo di 1000, allora $2009! - 1$ termina certamente con le cifre 999, quindi può essere scritto come $1000n + 999$.

Possiamo concludere che il $2009!$-esimo elemento della sequenza è uguale a:

$$5^{n-1} - n = 5^{(2009!-1)-1} - (2009! - 1) = 5^{2009!-2} - (2009! - 1) = 1000m + 625 - (1000n + 999)$$

da cui:

$$1000(m-n) + 625 - 999 = 1000(m-n) - 374 = 1000(m-n-1) + 1000 - 374 = 1000(m-n-1) + 626$$

Possiamo concludere che le ultime tre cifre del $2009!$-esimo elemento della sequenza sono 626, essendo un numero positivo (infatti è ovvio che $m>n+1$).

NOTA: Si può arrivare a tale conclusione per induzione. Sapendo che $5^4=625$, dimostriamo che se $5^{2\beta}$ termina per 625 lo farà anche $5^{2(\beta+1)}$, con $\beta>1$. Essendo $5^{2\beta}$=1000t+625, si ha che:

$5^{2(\beta+1)} = 5^{2\beta+2} = 5^{2\beta} \cdot 5^2$=(1000t+625)•25=25000t+15625=(25000t+15000)+625.

4.2 Soluzione del problema presentato dalla squadra di Brescia

Prima parte:

La successione richiesta è la seguente: $a_{n+1} = 5^{n+(-1)^n} - n \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Infatti sostituendo ad n opportuni valori, si troverà facilmente: $a_1 = 5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 123$, $a_4 = 22$. Inoltre a_{n+1} è determinato da una somma algebrica di una serie geometrica di ragione 5 e primo termine $5^{(-1)^n}$ ed una successione aritmetica di ragione -1 e primo termine $-n$. Il $2009!-esimo$ termine della successione sarà $a_{2009!} = 5^{(2009!-1)+(-1)^{(2009!-1)}} - (2009!-1) = 5^{2009!-2} - 2009!+1$ di cui sono richieste le ultime tre cifre:

$$5^{2009!-2} - 2009!+1 \equiv 5^{2009!-2} + 1 \equiv 625 + 1 \equiv 626 \bmod (1000).$$

La combinazione è 626.

> La stessa squadra ha affrontato anche il problema originale inserendo alcuni osservazioni nella seconda parte della soluzione.

Seconda parte:

Nel caso in cui non siano date informazioni sulla forma della successione, ne esistono diverse con le sole seguenti limitazioni:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 0,\ a_3 = 123,\ a_4 = 22,\ a_i \in \mathbb{N}$$

tali che si arrivi a diversi valori per $a_{2009!} \bmod (1000)$ e quindi a diverse combinazioni: ad esempio le successioni nella forma:

$$a_{n+1} = 5^{n+(-1)^n} - n + f(n+1),$$

dove $f(n+1)$ è una funzione che soddisfa

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0,\ f(n+1) \in \mathbb{N},\ f(2009!) \neq 0 \bmod (1000).$$

Ci si limiterà ora a dimostrare che esiste almeno una funzione in questa forma.

Si definisca

$$f(x) = \alpha^{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} - 1$$

dove α è un naturale pari. $f(x)$ è la somma algebrica tra una quantità certamente maggiore o uguale ad 1 e -1, quindi $\forall x$, $f(x) \in \mathbb{N}$. Per $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ si avrà $f(x) = 0$, quindi si verifica l'ipotesi $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$, $a_1 = 5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 123$, $a_4 = 22$.

Resta da dimostrare che esiste almeno un α tale che $f(2009!) \neq 0 \bmod (1000)$.

Se per assurdo:

$$\alpha^{(2009!-1)(2009!-2)(2009!-3)(2009!-4)} - 1 \equiv 0 \bmod (1000),$$

allora

$$\alpha^{(2009!-1)(2009!-2)(2009!-3)(2009!-4)} \equiv 1 \bmod (1000)$$

che è impossibile in quanto il primo membro è certamente un numero pari perchè numero pari elevato ad esponente naturale, ed il secondo membro è un numero dispari. È stato dimostrato quindi che esistono più successioni, che rispettano le ipotesi e forniscono diversi risultati finali, quindi portando quindi a diverse possibili combinazioni.

NOTA: L'esempio mostra la necessità d'interazione tra le due fasi: "problem posing" e "problem solving". Alcune osservazioni durante la soluzione del problema possono migliorare il testo del quesito.

5 Possibili ulteriori compiti

Compito 1. Uno può provare a trovare le ultime quattro cifre del 2009!-esimo elemento della serie ?

Compito 2. E' interessante e difficile da definire in modo attraente, ma rigoroso, altri tipi di successioni, per esempio la successione di Fibonacci e trattare un problema simile.

Compito 3. Si possano chiedere ai partecipanti del corso di inventare altri problemi simili.

Testi di riferimento (Consigli per ulteriori letture):

[1] http://www.dm.unipi.it/~eroe/index.php , site of the "Galilei" competition
[2] http://www.dm.unipi.it/~eroe/problemi.php , problems proposed by Math Labs