Matematika vo fyzike

Marek Varga

Úvod

Pri definovaní nových pojmov v matematike samotnú definíciu predchádzajú tzv. ilustračné príklady. Tieto starostlivo vybrané príklady nám ukazujú situáciu, ktorá si vyžaduje zavedenie nového pojmu, a tým vlastne vysvetľuje aj jeho opodstatnenie a dôležitosť. Nezriedka sa pri hľadaní ilustračných príkladov vyberieme do nematematických oblastí a disciplín, aby sme zároveň ukázali spätosť matematiky s reálnym životom, či nevyhnutnosť jej používania v rôznych situáciách. Vďačným objektom aplikácií matematických poznatkov býva predovšetkým fyzika. V nasledujúcich riadkoch použijeme pojmy a problémy z fyziky pri zavedení matematických pojmov: limita, derivácia či určitý integrál.

1. Limity vo fyzike

1.1 Potrebné vedomosti

- Fyzika – gravitácia, práca, energia
- Matematika – infinitezimálny interval, nekonečno

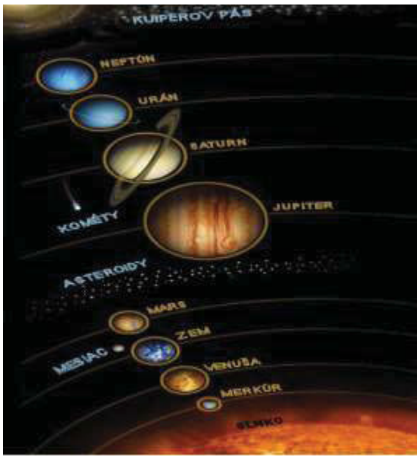
Úloha *Druhá kozmická rýchlosť*

Slnečná sústava je planetárna sústava hviezdy Slnko. Skladá sa zo Slnka, všetkých telies, ktoré obiehajú vplyvom gravitačného pôsobenia okolo neho (planéty, kométy, mesiace) a z medziplanetárneho priestoru, v ktorom sa tento pohyb uskutočňuje.

Na všetky telesá vo svojom okolí gravitačne pôsobia aj ostatné planéty, teda aj Zem. NASA vyslala na skúmanie vzdialených planét (Jupiter, Saturn, Urán, Neptún) sondu Voyager 2.

a) Akú energiu spotrebuje táto vesmírna sonda pri zmene svojej polohy zo vzdialenosti r na vzdialenosť d od stredu Zeme?

b) Akú rýchlosť jej musíme udeliť, aby dokázala opustiť gravitačné pole Zeme?



Obr. 1. *Slnečná sústava.*

Obr. 2. *Voyager 2.*

English version of the contribution the reader can find on the project Math2Earth web page.

Riešenie

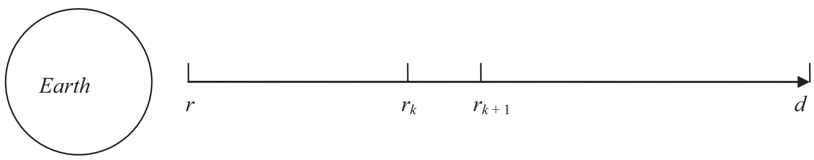
a) Označme M hmotnosť Zeme, symbolom m hmotnosť sondy Voyager. Ak je naša sonda vzdialená od stredu zeme r, je k našej planéte priťahovaná silou

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

Energia E potrebná na pohyb v smere od Zeme sa rovná práci W, ktorú musí sonda vykonať pri zmene tejto polohy, tj.

$$E = W = -F\Delta r = -\kappa \frac{mM}{r^2}\Delta r.$$

Veľkosť pôsobiacej sily však nie je konštantná na celej dráhe z miesta r do miesta d. Preto musíme túto vzdialenosť rozdeliť na n menších (infinitezimálnych) úsekov, na ktorých sa pôsobiaca sila približne nemení.



Obr. 3. *Pohyb rakety.*

Uvažujme úsek $(r_k;\ r_{k+1})$. Pre prácu vykonanú na tomto úseku platí

$$W_k = -F\Delta r_k = -\kappa \frac{mM}{r^2}\Delta r_k = -\kappa \frac{mM}{r_k r_{k+1}}\left(r_{k+1} - r_k\right) = \kappa mM\left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k}\right).$$

Pre celkovú energiu potrebnú na prelet vzdialenosti z r do R potom platí:

$$E = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} \kappa mM\left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k}\right) = \kappa mM\left[\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right)\right] = \kappa mM\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_1}\right) =$$

$$= \kappa mM\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right),$$

kde κ – gravitačná konštanta ($\kappa \approx 6{,}67.10^{-11}\ m^3/kg.s^2$), M – hmotnosť Zeme ($M \approx 5{,}9.10^{24}\ kg$).

Keďže navyše platí $\kappa M = gR^2$, môžeme náš výsledok zapísať v tvare

$$E = mgR^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right),$$

kde g – tiažové zrýchlenie ($g \approx 9{,}81\ m/s^2$), R – polomer Zeme ($R \approx 6378\ km$).

b) Rýchlosť, ktorú musíme udeliť sonde Voyager, aby sa vymanila z gravitačného poľa Zeme, nazývame druhá kozmická rýchlosť. Označme ju symbolom v_{II}.

Ďalej označme T – pohybovú (kinetickú) energiu sondy, U – polohovú (potenciálnu) energiu sondy. Počas celého letu platí zákon zachovania energie, tj.

T + U = konštanta.

Odtiaľ vyplýva, že takisto musí platiť

T (začiatočná) + *U* (začiatočná) = *T* (konečná) + *U* (konečná).

Na začiatku pohybu je sonda s hmotnosťou m na povrchu Zeme a udelíme jej rýchlosť v. To znamená, že

$$T\,(\text{začiatočná}) = \frac{1}{2}mv^2\,,\quad U\,(\text{začiatočná}) = 0.$$

V konečnej fáze letu (v okamihu zastavenia) zase platí

$$T\,(\text{konečná}) = 0,\quad U\,(\text{konečná}) = mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_{\max}}\right),$$

kde g – tiažové zrýchlenie ($g \approx 9{,}81\ m/s^2$), R – polomer Zeme ($R \approx 6378\ km$), $r_{\max}$ – vzdialenosť družice od povrchu Zeme.

Dosadením do zákona zachovania energie dostávame

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_{\max}}\right),$$

odtiaľ

$$v = \sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_{\max}}\right)}\,.$$

Ak družici udelíme druhú kozmickú rýchlosť, unikne z gravitačného poľa Zeme, tj. doletí „nekonečne ďaleko“ od planéty Zem. Preto

$$v_{II} = \lim_{r_{\max}\to\infty}\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_{\max}}\right)} \approx 11{,}2\ km/s\,.$$

2. Derivácia vo fyzike

2.1 Potrebné vedomosti

- Fyzika – mechanický pohyb (dráha, rýchlosť, čas)
- Matematika – infinitezimálny interval, limita

Úloha *Okamžitá rýchlosť telesa*

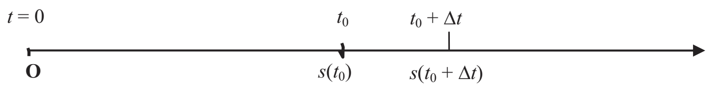
Objekty v reálnom svete sa pohybujú rôznymi rýchlosťami – človek dokáže vyvinúť rýchlosť takmer 40 km/h, gepard aj 130 km/h, jastrab pri útoku pokojne prekoná 300 km/h... Všetci spomenutí sa zrejme nepohybujú konštantnou rýchlosťou. Ako teda nájdeme vzťah na výpočet okamžitej rýchlosti telesa?

Obr. 4. *Gepard.*

Obr. 5. *Jastrab.*

Riešenie

Na problematiku určenia okamžitej rýchlosti telesa sa pozrieme čisto z matematickej stránky, preto si dovolíme podstatné zjednodušenie – uvažujme len priamočiary pohyb.



Obr. 6. *Nerovnomerný pohyb.*

Tento pohyb môže byť rovnomerný alebo nerovnomerný. Ako už názov naznačuje, v prvom prípade je rýchlosť v (čo sa týka veľkosti aj smeru) konštantná. To znamená, že za rovnaké časové úseky Δt prejde teleso rovnakú dráhu Δs. Okamžitú rýchlosť telesa preto ľahko určíme ako podiel

$$v_{okam} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Táto jednoduchosť sa nezopakuje pri nerovnomernom pohybe – teleso za rovnaké časové okamihy Δt totiž prejde rôzne dlhé úseky dráhy Δs. Vyššie uvedeným podielom tu môžeme definovať len tzv. priemernú rýchlosť, tj.

$$v_{priem} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ako určiť okamžitú rýchlosť?

Okamžitou rýchlosťou je rýchlosť telesa v istom konkrétnom okamihu t_0. Predpokladajme, že teleso prešlo do tohto okamihu dráhu $s(t_0)$. Ďalej predpokladajme, že prejdená dráha v čase $t_0 + \Delta t$ mala veľkosť $s(t_0 + \Delta t)$. Za čas Δt teda teleso prešlo dráhu $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, preto pre jeho priemernú rýchlosť platí

$$v_{priem} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Ak budeme sledovať veľké časové úseky Δt, rýchlosť telesa sa môže počas nich veľmi meniť. Preto pri určovaní okamžitej rýchlosti musíme zobrať čo najmenší časový úsek Δt, počas ktorého je rýchlosť v „takmer konštantná“. Matematicky tento fakt zapíšeme

$$v_{okam} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{priem} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0).$$

3. Určitý integrál vo fyzike

3.1 Potrebné vedomosti

- Fyzika – mechanický pohyb (dráha, rýchlosť, čas)
- Matematika – infinitezimálny interval, limita, derivácia

Úloha *Dráha telesa*

Teleso sa pohybuje nerovnomerným pohybom tak, že pre jeho rýchlosť v platí $v = v(t)$. Akú dráhu prejde toto teleso za časový interval $\langle a; b\rangle$?

Obr. 7. *McLaren Mercedes.*

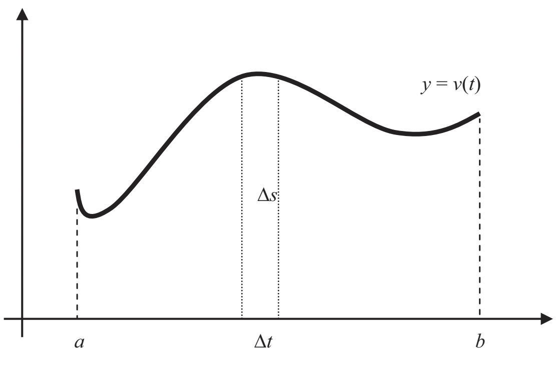
Riešenie

Pre dráhu s, ktorú prejde teleso, ak sa za čas t pohybuje rovnomerným pohybom rýchlosťou v platí

$$s = vt.$$

Keďže teraz sa rýchlosť pohybu mení, rozdeľme časový interval $\langle a; b\rangle$ na n častí šírky Δt. Za časový okamih Δt sa teleso pohybuje rovnomerne (resp. jeho rýchlosť sa takmer nemení), preto pre element dráhy platí

$$\Delta s = v\cdot\Delta t.$$



Obr. 8. *Dráha telesa.*

Celkovú dráhu dostaneme sčítaním všetkých elementov dráhy, t.j.

$$s = \sum_{n=1}^{n} \Delta s = \sum_{n=1}^{n} v \cdot \Delta t \, .$$

Náš výsledok bude presný, ak by sme interval $\langle a; b \rangle$ rozdelili opísaným spôsobom na nekonečne veľa častí šírky Δt. Potom pre prejdenú dráhu platí

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{n} \Delta s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{n} v \cdot \Delta t \, .$$

Toto číslo nazývame určitým integrálom z funkcie $v(t)$ a označujeme

$$s = \int_a^b v(t) \, dt \, .$$

4. Funkcie vo fyzike

4.1 Potrebné vedomosti

- Fyzika – rovnomerný pohyb, zrýchlený pohyb, periodický pohyb
- Matematika – lineárna funkcia, kvadratická funkcia, priama úmernosť, nepriama úmernosť, goniometrické funkcie, graf funkcie

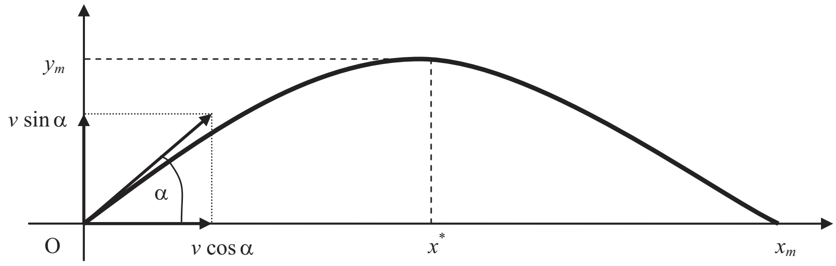
Úloha *Výstrel z dela*

Z dela vystrelíme projektil pod uhlom α k vodorovnej rovine so začiatočnou rýchlosťou v. Zistite maximálny dostrel dela x_m a maximálnu výšku y_m, ktorú projektil počas letu dosiahne.

Obr. 9. *Výstrel z dela.*

Riešenie

Pomôžme si náčrtom situácie v súradnicovej sústave, pričom delo umiestnime do jej počiatku.



Obr. 10. *Výstrel z dela.*

Pohyb projektilu sa skladá z dvoch častí:

(1) rovnomerný pohyb vo vodorovnom smere, pre ktorý platí $x = vt\cos\alpha$;

(2) rovnomerne spomalený pohyb vo zvislom smere, pre ktorý platí $y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Z prvej rovnice vyjadrime čas:

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha} .$$

Po dosadení do druhej rovnice dostávame závislosť výšky projektilu y od vzdialenosti x:

$$y(x) = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 .$$

V bode dopadu projektilu platí $y = 0$, tj.

$$x_m\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x_m^2 = 0 .$$

Odtiaľ dostávame

$$x_m = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} .$$

Zo zákona zachovania energie vyplýva, že vzdialenosť, v ktorej projektil dosahuje maximálnu výšku, je práve v polovičnej vzdialenosti maximálneho dostrelu, tj.

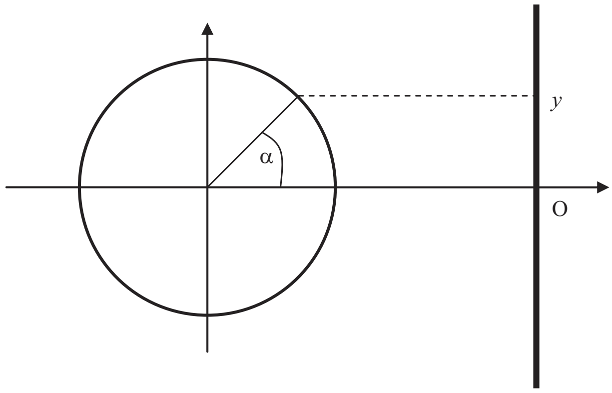
$$x^* = \frac{x_m}{2} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g} .$$

Pre maximálnu výšku potom platí

$$y_m = y\left(x^*\right) = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} .$$

Úloha *Kmitavý pohyb*

Hmotný bod sa pohybuje po kružnici s polomerom A konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Tento pohyb premietame na plátno rovnobežné s osou o_y (pozri obrázok). Napíšte rovnicu kmitavého pohybu pozorovaného na plátne!



Obr. 11. *Kmitavý pohyb.*

Riešenie

Ak hmotný bod vykonáva rovnomerný pohyb po kružnici, jeho priemet vykonáva kmitavý pohyb. Označme symbolom O jeho rovnovážnu polohu, symbolom y okamžitú výchylku. Podľa obrázka potom platí $y = A\sin\alpha$.

Keďže sa hmotný bod pohybuje uhlovou rýchlosťou ω, pre uhol α (v oblúkovej miere) platí $\alpha = \omega t$, kde t je čas meraný od začiatku pohybu. Pre okamžitú výchylku v ľubovoľnom čase t teda dostávame:

$$y(t) = A\sin\omega t .$$

Obr. 12. *Vodný mlyn.*

Úloha *Funkcie*

Vo fyzike je mnoho závislostí medzi najrôznejšími veličinami vyjadrených pomocou najjednoduchších funkcií – pomocou lineárnej, kvadratickej, pomocou priamej či nepriamej úmernosti.

Určte, o aké funkcionálne závislosti ide v nasledujúcich prípadoch a načrtnite grafy týchto funkcií pre nejakú reálnu situáciu:

(a) $I(U) = \frac{U}{R}$ (elektrický prúd v obvode)

(b) $p(S) = \frac{F}{S}$ (tlak vzduchu)

(c) $E(\lambda) = \frac{hc}{\lambda}$ (energia fotónu)

(d) $E(m) = mc^2$ (relativistická energia)

(e) $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ (pohybová energia)

(f) $p(T) = \frac{nRT}{V}$ (tlak ideálneho plynu)

(g) $M(v) = mvr$ (moment hybnosti)

(h) $U(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (potenciálna energia jadra vodíka)

(i) $F_e(q) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon r^2}$ (elektrická sila)

(j) $s(t) = s_0 + vt$ (dráha rovnomerného pohybu)

(k) $B(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ (magnetická indukcia)

(l) $s(t) = s_0 + vt + \frac{gt^2}{2}$ (dráha zrýchleného pohybu)

(m) $Q(I) = RI^2 t$ (teplo vo vodiči)

(n) $\lambda(v) = \frac{h}{mv}$ (vlnová dĺžka častice)

(o) $F_h(h) = \rho Shg$ (hydrostatická sila)

(p) $E(\omega) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ (energia oscilátora)

(q) $W(s) = Fs\cos\alpha$ (mechanická práca)

(r) $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ (dráha pri voľnom páde)

(s) $F_d(v) = m\frac{v^2}{r}$ (dostredivá sila)

(t) $p(V) = \frac{Nm_0 v_k^2}{3V}$ (tlak plynu)

Literatúra

[1] Hajko, V: Základy fyziky; Veda, Bratislava, 1990

[2] Orear, J: Základy fyziky; Alfa, Bratislava, 1977

[3] http://sk.wikipedia.org/wiki/Slnečná_sústava#Plan.C3.A9ty

[4] http://slovenskazver.szm.sk/jastrab.jpg

[5] http://cs.wikipedia.org/wiki/Gepard_štíhlý

[6] http://www.military.cz/russia/armour/artillery/tos1/tos1.htm

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hakkinen.jpg

[8] http://belicova.blog.sme.sk/c/132579/Syria-Vianoce07-Hama-mlyny-a-vylety.html