

# Dette er ikke titlen på dette tema

Evgenia Sendova

## 1 Paradokser – her, der, allevegne

*Jeg beklager dybt* – skrev den franske matematiker og filosof Blaise Pascal til en ven – *men jeg har ikke tid til at skrive et kortere brev...* I første omgang lyder det paradoksalt, men tænker vi lidt over det indser vi hvor svært det er *at formulere i ti sætninger hvad andre bruger hele bøger til at fortælle*, og endda - hvad andre IKKE får fortalt med hele bøger...

Hvad betyder *paradoks* egentlig? Selv ordbøgerne er ikke enige – ifølge Webster er et paradoks *en påstand der skønt den er sand ser ud til at være falsk og selvmodsigende* medens Longman definerer det som *en påstand som virker tåbelig eller umulig men har noget sandt ved sig*. Ordet kommer fra det klassiske Grækenland hvor det betød "i modsætning til den accepterede mening".

En af de bedste matematiske formidlere, Martin Gardner, inddeler paradokser i fire hovedkategorier [1]:

- Påstande der tilsyneladende er falske men faktisk er sande
- Påstande der tilsyneladende er sande men faktisk er falske
- Ræsonnementer der tilsyneladende er fejlfri men fører til logisk selvmodsigelse (ofte kaldet *fejlslutning*).
- Påstande hvor det ikke kan afgøres om de er sande eller falske.

Livet er fuldt af paradokser (i alle de ovennævnte betydninger) i det omfang at det ville være paradoksalt ikke at støde på paradokser af og til. For et par uger siden spurgte jeg i en boghandel efter *Hvad er titlen på denne bog?* – en berømt bog om paradokser i logikken af Raymond Smullyan. Boghandleren reagerede vredt: "Du ved ikke selv hvad bogens titel er men du forventer at JEG ved det..."

Næste dag kom en fax hvis eneste læselige sætning lød: "Hvis De ikke har modtaget denne fax ring venligst til os..." (En fin variant heraf er: *Jeg har ikke modtaget brevet hvori De erindrer mig om de penge jeg skylder Dem...*)

Nogle af jer er muligvis stødt på reklamer som: HVIS DU IKKE KAN LÆSE DETTE, RING TIL 898-60-01. Eller har set (eller er blevet ramt af) nedfaldende skilte med teksten: PAS PÅ – NEDFALDENDE OBJEKTER! Andre har skrevet på mure som vist på Fig. 1:



Fig.1 Et paradoks ofte set på mure og vægge..



Fig.2 Alle kretensere lyver. (Streg: Yovko Kolarov)

Her følger et par historier som, selv hvis de ikke er sande, godt kunne være det:

- I en matematiktime siger en af eleverne til læreren: *Der er en fejl på tavlen.* Svaret var: *Jeg har kun lavet en fejl i mit liv – da jeg troede at jeg havde lavet en fejl...*
- Bertand Russel hævdede at George Edward Moore (en fremtrædende engelsk filosof) kun en gang i sit liv havde fortalt en løgn. Det var da han blev spurgt om han altid fortalte sandheden. Da tænkte Moor sig om et øjeblik og svarede: *Nej.*

Mange aforismer, vittigheder og tegneserier er baseret på paradokser. Her er nogle eksempler.

Den irske forfatter Oscar Wilde sagde: *Selv om det lyder paradoksalt forholder det sig ikke desto mindre således at livet efterligner kunsten meget mere end kunsten efterligner livet.*

Komikeren Grucho Marx huskes bl.a. for paradoksale replikker som disse:

- *Jeg ønsker ikke at være medlem af en forening der optager folk som mig.*
- *Jeg synes at fjernsyn er meget lærerigt. Hver gang nogen tænder for det sætter jeg mig ind ved siden af og læser en bog.*

Stanisław Jerzy Lec, en af de mest indflydelsesrige satirikere i det 20. århundrede medtager bl.a. følgende i sine *Ufriserede tanker*:

- *Hvis en mand, der ikke kan tælle, finder en firkløver, er han så heldig?*
- *Radioen er en fantastisk opfindelse – man skal bare trykke på knappen og der bliver stille...*

I en radise stripe siger Søren Brun til Trine at han har fundet en ny livsfilosofi – at svare NEJ på alle spørgsmål.

- *At svare NEJ til ethvert spørgsmål?* spørger Trine forundret.
- *Ja, jeg mener NEJ,,, Arghh, du har lige ødelagt min nye livsfilosofi* - sukker Søren Brun.

## 1.1 Opgaver og problemstillinger

**Opgave 1.** Tænk over et paradox som du er stødt på i din dagligdag.

**Opgave 2.** Tager du følgende sætning på engelsk: *This sentence in English is difficult to translate in German* og bruger internet-tjenesten "Google Oversæt" for at oversætte den til dansk får du følgende resultat: *Denne sætning på engelsk, er vanskeligt at oversætte på tysk.* Hvad synes du om den oversættelse? Kan du gøre det bedre end "Google Oversæt"?

**Opgave 3.** Her følger en række regler indsamlet af Harold Evans [1]. Nogle af reglerne er stærkt afhængige af at de handler om/er formuleret på engelsk og er derfor ikke oversat til dansk. Forklar hvor i paradokserne består:

- *Tag dig i agt for ikke at bruge dobbelte benægtelser..*
- *Sæt ikke kommaer, som er unødvendige.*
- *Verbs has to agree with their subjects.*
- *About those sentence fragments.*
- *Try to not ever split infinitives.*
- *Gennemlæs altid det du har skrevet for at kontrollere om du har nogle ord.*
- *Apostroffer's brug ved dannelse af ejefald volder tit problemer.*

**Opgave 4.** Prøv at formulere tilsvarende paradoksale grammatiske regler fra det danske sprog.

**Opgave 5.** Tænk på (eller udtænk) en paradoksal titel til en bog, artikel eller lærebog.

**Opgave 6.** En bedstemor trak ønskeben med sit lille barnebarn . Hun ønskede at *han* ville vinde. Hun trak den store del af benet. Vandt hun? Forklar din tankegang.

## 2 Er dette et paradoks eller er det ikke?

Det der ser ud som et paradoks bunder ofte i utilstrækkelig matematisk viden eller manglende eftertanke. F.eks. lød det overrasket fra en dreng, der lige havde lært at bruge en lommeregner: *1/2 er et lille tal, 1/4 er også et lille tal, men se hvor stor 1/3 er!!!* (Hvordan tror du han tænkte?) Eller hvad med den om læreren der beklagende udtalte: *Den største halvdel af mine studerende ved ikke at de to halvdele af hvad som helst er lige store.* Og så var der den distræte professor der sagde: *Der er tre slags matematikere – dem der kan tælle og dem der ikke kan.*

Selv det berømte løgnerparadoks [2] fortjener næsten ikke betegnelsen *paradoks*. Lad os se lidt nærmere på den klassiske historie – den handler om Epimenides, en kretensisk digter fra 6. århundrede før Kristi fødsel, som ifølge sagnet udtalte: *Kretensere lyver altid* (Fig. 2). I lang tid anså man dette udsagn fra Epimenides for et paradoks. Således ræsonnerede man i det klassiske Grækenland (kan du finde et hul i ræsonnementet):

*Hvis påstanden er sand så er den falsk (fordi kretensere altid lyver og Epimenides selv er fra Kreta og derfor lyver). Hvis påstanden derimod er falsk, så siger folk fra Kreta altid sandheden, hvilket betyder at den er sand – igen er vi nået til en modsætning.*

Fandt du fejlen? Selvfølgelig – den logiske negation af påstanden *Alle kretensere er løgnere* er ikke *Alle kretensere taler sandt* men snarere *Ikke alle kretensere er løgnere* "Ikke alle" (eller "ikke enhver") betyder ikke det samme som "ingen"; det skal forstås som "nogle" [3], dvs. den logiske negation er *Der findes mindst en kretenser som siger sandheden*. Det betyder at paradokset reelt set ikke er et paradoks – Epimenides er en løgner, men der er nogle kretensere (mindst en), der taler sandt.

Det er i øvrigt ikke altid let at negere en påstand. Når vi negerer et udsagn som er sandt forventer vi at negationen er falsk. Men se så på følgende eksempler:

- *Denne sætning består af seks ord.*
- *Halvdelen af de studerende på dette hold er dumme.*

Somme tider forvandles et ikke-paradoks til et paradoks fordi ordene skifter betydning medens formuleringen der indeholder ordene forbliver intakt. Hvor mange gange har du ikke hørt vendingen: "Undtagelsen der bekræfter reglen" brugt til at argumentere for at en regel blot bliver stærkere og mere meningsfuld når du kan udpege tilfælde hvor den ikke gælder? Vendingen bruger imidlertid ordet *bekræfte* i den gamle betydning af *afprøve* Du kommer nærmere den oprindelige betydning hvis du bruger et synonym og siger "Undtagelsen udfordrer reglen", på samme måde som du ville eftervise at et computerprogram virker efter hensigten ved at udsætte det for ekstreme data. *Korrekt forstået bekræfter den originale talemåde snarere end benægter det mest basale princip ved videnskabelig undersøgelse: man skal kunne redegøre for undtagelserne, ikke ignorere dem* [4].

## 2.1 Opgaver og problemstillinger

**Opgave 7.** Antag at du siger: *Jeg lyver*. Er det du siger sandt eller falsk? Forklar hvorfor det er et paradoks.

**Opgave 8.** Trine påstår at det modsatte af  $x < 10$  er  $x > 10$ . Er du enig? Forklar.

**Opgave 9.** Prøv at negere de følgende udsagn:

- *Alle herinde sover.*
- *Ingen lytter.*
- *Nogle elever har løst opgaven..*
- *Alle elever i denne klasse er piger.*
- *Der er mindst en læser der har læst hertil.*
- *Ikke alle opgaver er udfordrende.*

## 3 Nogle paradokser fra naturvidenskab

Selv om man ikke skulle tro det, så er paradokser også en væsentlig del af naturvidenskaberne fordi den udvikler og undersøger "skøre", dvs. paradoksale teorier. Som et eksempel på dette har vi Niels Bohrs reaktion på en artikel af Pauli og Heisenberg: *Vi er alle enige om at jeres teori er tosset. Spørgsmålet er om den virkelig er så tosset at der er en chance for at den er sand...* Intet under at videnskaben skrider frem i takt med antallet og dybden af de paradokser der overvindes - i takt med paradoksaliteten af de nye ideer. Videnskaben står ikke stille. Ofte accepteres et tilsyneladende paradoks som helt normalt. Betragte f.eks. de følgende eks-paradokser:

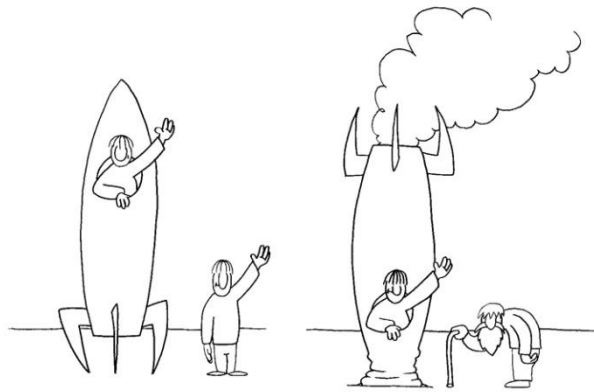
- *I vakuum falder tunge objekter ikke hurtigere end lette objekter.*
- *Varme er bevægelse.*
- *Malaria forårsages af myg.*

- *Der er lige så mange ulige naturlige tal som der er naturlige tal.*

Det der skete med det sidste paradoks og mange andre af formen "helheden er lig med delen" er endt med at blive definitionen af *uendelig*.

Selv et af det tyvende århundredes største videnskabelige fremskridt, relativitetsteorien, blev af Rutherford kaldt nonsens (*Vi behøver ikke dette...*). Dengang var Rutherford allerede en verdensberømt videnskabsmand og teorien var ikke helt ny.

Et af de kendte billeder fra relativitetsteorien er det såkaldte tvillingeparadoks – hvor en af to tvillinger sendes af sted med en raket og kommer tilbage til jorden en gang i fremtiden. Tiden på raketten går langsommere på grund af den større hastighed og når tvillingerne genforenes vil de ikke længere være lige gamle – jo længere rejse og jo større rakethastighed – desto større aldersforskel. Som Hardy sagde: *Hvis det ikke havde været for Einstein ville vores fysiske verdensbillede være anderledes*



**Fig.3** Tvillingeparadokset ifølge Einstein.



**Fig.4** Hvis jeg kun kan barbere dem der ikke kan barbere sig selv, kan jeg så barbere mig selv?

(Tegning: Yovko Kolarov)

Men måske er det største paradoks i naturvidenskabelig sammenhæng, at der også i den rene matematik er paradokser, der fører til dyb indsigt.

### 3. 1 Paradokser i matematik

Matematikkens historie byder bl.a. på tre kriser forårsaget af udfordrende paradokser, hvor løsningen på de opståede problemer førte til udvikling af nye teorier. Den første krise blev fremprovokeret af erkendelsen af at diagonal og side i et kvadrat er inkommensurable. Håndteringen af denne krise førte til de irrationale tal (selv deres navn antyder hvor lagt fra "rationale" de har forekommet de gamle grækere – de fortolkede dem slet ikke som tal men håndterede dem med geometriske metoder).

Krise nummer to forvoldte det 17. og 18. århundredes matematikere en mængde problemer med infinitesimale forhold. Problemet var at de samme størrelser blev fortolket både som 0 og forskellige fra 0. Det blev løst med Chauchys introduktion af grænseværdi.

Den (indtil videre) sidste krise (19.-20. århundrede) var så dyb at den påvirkede hele grundlaget for matematikken. Den fremragende tyske logiker Frege havde lige færdiggjort sin bog "Grundlagen der Arithmetik" med hvilken han mente at have udviklet en konsistent mængdelære der kunne fungere som grundlag for al matematik. Bogen skulle til at gå i trykken, da han modtog et brev fra Russell, der her berettede om et paradoks om mængder: *Betragt mængden af alle mængder der ikke er et element i sig selv. Er den et element i sig selv?* Uanset hvad De svarer vil De modsige Dem selv [1]. For at gøre paradokset mere forståeligt for et større publikum formulerede han det også som det der i dag kendes som *barberens paradoks*: *Hvis en barber har*

tilladelse til at barbere alle de mænd der ikke kan barbere sig selv (og kun dem), kan han så barbere sig selv? (Fig. 4). Freges mængdelære tillod eksistensen af mængden af alle mængder, der ikke er element af sig selv. Det blev klarlagt med Russells brev at en sådan mængde er selvmodsigende. Selvfølgelig var Frege ikke begejstret (for at sige det mildt). I overensstemmelse med Russell gik udviklingen mod at *takket være afslørende paradokser og deres løsning blev matematikken mere logisk og logikken – mere matematisk...*

I sin *typeteori* gjorde Russell et *gennemgribende forsøg* på at finde en løsning på paradokserne. Han dannede et hierarki af typer på en sådan måde at det ikke var tilladt at opfatte en mængde som et element i sig selv eller ikke et element i sig selv. På denne måde eliminerede han selvmodsigende mængder. Der vil ikke være nogen meningsfuld måde at definere dem på hvis de skal overholde reglerne for *typeteorien* [1].

Kort sagt: Hver gang matematikken er kommet ud i en alvorlig krise er den blevet reddet af nye ideer hvorved den har genvundet sit image som *ufejlbarlig* videnskab. Derfor skal vi ikke være bange for paradokser men snarere lede efter nogle som kan give anledning til at nye teorier udfolder sig.

Et af de mest overvældende og komplicerende paradokser i matematikken er Kurt Gödels berømte *ufuldstændighedssætning*. Den kan betragtes som hans forsøg på at efterprøve Epimenides løgnerparadoks i en rent matematisk formulering, så godt som det nu lader sig gøre. Lad os se på sætningen: *Denne sætning kan aldrig bevises*. Hvis den er falsk følger det at den kan bevises, men så er den sand og kan aldrig bevises. Paradokset opstår fordi begrebet "bevisbarhed" ikke er ordentligt defineret. I den matematiske logik taler man ikke om bevisbarhed i al almindelighed, men om *bevisbarhed i et bestemt system*. Gödel viser, at i ethvert righoldigt matematisk system *S* er det muligt at formulere et udsagn, der minder meget om løgnerparadokset: *Denne formel kan ikke bevises inden for det aksiomatiske system S*. Det lykkedes for Gödel at konstruere en påstand, hvor hverken påstanden selv eller dens negation kan bevises i det givne system.

Jeg undskylder over for læseren at jeg ikke har haft tid til at korte dette temaafsnit ned. Hvis du virkelig har læst hertil kan jeg forsikre dig om at dette ikke er sidste sætning.... eller er det?

P. S. Da jeg spurgte en af mine kolleger om, hvad han syntes om dette "måske-et-Math2Earth tema", mumlede han noget i retning af: *Det kunne være værre...* Min umiddelbare reaktion var: "Er det alt hvad du har at sige?" *Nej, ikke helt, jeg kunne have sagt: "Det kunne ikke være værre...."...*

Nu skal du have lejlighed til at se hvordan det står til med din egen logik ☺

## 3. 2 Opgaver og problemstillinger

**Opgave 10.** Lav varianter af barberparadokset (udskift barber med kok, maler, robot osv.)

**Opgave 11.** Der er mange tal der kan gøre sig fortjent til betegnelsen *interessant* som følge af nogle af deres egenskaber (f.eks. er 7 et *primtal*, 28 *perfekt* osv. )

- Mon alle naturlige tal er interessante? Prøv at argumentere ved at antage det modsatte. Hvad skal vi sige om det mindste naturlige tal der ikke er interessant?
- Modifier argumentet til at undersøge fænomenerne *spændende* og *kedelige* mennesker. Findes der *kedelige* mennesker?

**Opgave 12.** Nærlæs følgende dialog:

**Læreren:** Hvem rev denne bog i stykker?

**Betty:** Ikke mig!

**Tom:** Det var mig!

**Jonas:** Kun en af dem taler sandt!

Er det muligt at Jonas påstand er sand, hvis vi ved at kun en af dem (Tom og Betty) har gjort det?

**Opgave 13.** Der er 3 falske udsagn her:

- $2+2=4$
- $3 \times 6 = 17$

- $8/4 = 2$
- $13-6=5$
- $5+4 = 9$

Hvilke?

**Opgave 14.** Er følgende ordveksling paradoksal?

**Platon:** *Sokrates fremsiger nu en løgn!*

**Sokrates:** *Platon siger sandheden!*

**Opgave 15.** Forklar hvorfor bogstavet O er erstattet af en hexagon i følgende sætning [5]:

Hvis  $\pi = 3$  vil ordet ordbog se ud som her

**Opgave 16.** Prøv at formulere sætninger der udtaler sig om sig selv [6, 7], som disse:

- *I denne sætning forekommer 0 1 gang, 1 11 gange, 2 2 gange, 3 1 gang, 4 1 gang, 5 1 gang, 6 1 gang, 7 1 gang, 8 1 gang og 9 1 gang.*

**Opgave 17.** Skriv på den ene side af et stykke papir:

SÆTNINGEN PÅ DEN ANDEN SIDE AF DETTE STYKKE PAPIR ER SAND.

På den modsatte side af papiret skriver du:

SÆTNINGEN PÅ DEN ANDEN SIDE AF DETTE STYKKE PAPIR ER FALSK.

Giv papiret til en ven og spørg hvilken af sætningerne der er sand.

## Referencer

- [1] Gardner, M. *Aha! Gotcha – paradoxes to puzzle and delight*, W.H. Freeman and Company, New York, 1995
- [2] Martin, R. L. ed. *The Paradox of the Liar*, New Haven: Yale University Press, 1970.
- [3] McInerny D.Q. *Being logical (A guide to good thinking)*, Random House Trade Paperback, NY, 2004
- [4] Goldenberg, E. P., Feurzeig, W. *Exploring Language with Logo*, The MIT Press, 1987, p. 170
- [5] Hofstadter, D.R. *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern*, Basic books, 1985
- [6] Burbanks, A. *Self-referential sentences*  
<http://lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/selfref/index.html>, [accessed 18.01.2010]
- [7] [http://www2.vo.lu/homepages/phahn/humor/self\\_ref.htm](http://www2.vo.lu/homepages/phahn/humor/self_ref.htm) [accessed 18.01.2010]

## Forslag til videre læsning

(Readings suggested by Martin Gardner in [1] are preceded by \*.)

Byers, W. *How Mathematicians Think, (Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics)*, Princeton University Press, 2007

Gardner, M. *The Paradox of the Unexpected Hanging*, Chapter 1 in *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, New York: Simon&Schuster, 1968

Gardner, M. *Free Will Revised*, Mathematical Games Department, *Scientific American*, July, 1973

Gardner, M. *Mr. Apollinax Visits New York*, Chapter 11 in *New Mathematical Diversions from Scientific American*, New York: Simon&Schuster, 1966

\* Hofstadter, D. R. *Gödel, Escher, Bach*, Basic books, 1979

Kasner, E., Newman, J. R. *Paradox Lost and Paradox Regained*, *The World of Mathematics*, vol. 3, New York: Simon&Schuster, 1956

\* Lewis, C. *The Annotated Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking Glass*. Martin Gardner, ed. New York:Clarkson N. Potter, Brabhall House, 1960.

\* Tarski, A. *Truth and Proof*, *Scientific American*, June 1969

- \* Quine W.V. *Paradox*, The Foundations of Mathematics, IV, 1962
- \* Smullyan, R. *What is the Name of This Book?* Englewood Cliffs, N.J.; Prentice Hall, 1978
- \* Smullyan, R. *This Book Needs No Title*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980