Fra små sjove opgaver til åbne opgaver med stor dybde

Vladimir Georgiev

1 Introduktion

Den største overraskelse for gruppen af opgavestillere ved "Galilei" holdkonkurrencen i 2009 var en problemstilling, der til at begynde med så meget uskyldig ud: Elever og lærere tog udgangspunkt i en praktisk problemstilling og endte op med et kompliceret matematisk problem som siden har været drøftet intenst blandt kolleger på universitetet ved Pisa: Hvis der er givet et kvadrat i planen og man ser på kurver γ, der har den egenskab, at en ε – omegn af kurven overdækker kvadratet, kan man så finde en sådan kurve med minimal længde.

Den overraskende var, at dette problem tilsyneladende var uløst og kun det tilfælde hvor parameteren ε var meget lille, havde været behandlet i de forskningsartikler som kollegaerne ved universitetet i Pisa kendte til.

Det eksempel vi her skal se på er af stor betydning for problemudvikling og modellering inden for andre grene af naturvidenskaben og i det virkelige liv. Et standard matematikpensum for f.eks. gymnasieniveau er traditionelt meget stramt organiseret og righoldigt på problemstillinger og eksempler med faste svar. Matematisk modellering i problemudviklingslaboratorier er derimod en lidt risikabel proces fordi:

- der er vigtige fysiske fænomener som kræver meget komplicerede modeller og avancerede matematiske værktøjer
- der er modeller som ikke har en matematisk løsning i traditionel forstand

2 Områder der berøres i dette afsnit

2.1 Matematisk indhold

- Geometri (i plan og rum)

2.2 Naturvidenskabeligt indhold

- Astronomi og navigation
- Klassisk mekanik

2.3 Redskaber der kan indgå i problemløsningsprocessen

- Variationsregning
- Ordinære differentialligninger

3 Problemstillingen og forsøg på at løse den

Lad os se på det "uskyldige" problem stillet af holdet fra gymnasiet "Dini" i Pisa.

3.1 Problem "Måne satelit"

Satelitten THETA fra selskabet GoogleMoon er udstyret med et digital kamera, der tager billeder med en synsvinkel på 20°. For at få gode billeder må satelitten kredse omkring Månen i konstant højde svarende til Månens radius R=1738 km og kameraet skal hele tiden vende med retning direkte mod Månens center. Problemet er at finde den korteste satellitbane, der muliggør at hele Månens overflade er dækket ind med billeder fra kameraet.

Fig.1 Billede af Månen fra NASA [3].

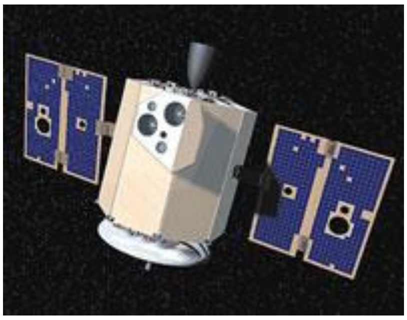


Fig.2 NASA satellit [3]

Man ser at dette problem ligner det som forskerne ved Pisa Universitet kendte til. Deres uløste problem handlede om et kvadrat i planen medens "Dini" holdets problemstilling vedrører en kugleflade. Et praktisk problem fører til et svært matematisk problem.

Hvordan skulle holdene kunne løse et sådant problem når de ikke rådede over avancerede matematiske værktøjer og når selv specialisterne med omfattende matematisk træning ikke kunne løse det? Holdet fra Brescia gjorde brug af appelsiner i et interessant løsningsforslag.

3.2 Problem "Måne satellit" – løsningsforslag fra Hold Brescia, Italien

Vi skulle finde den korteste bane for satellitten! Vi gættede på at det kunne være en spiralbane, men vi kunne ikke regne os frem til den. Vi prøvede at pille en masse appelsiner. Først fjernede vi en kalot på cirka 20°, så fortsatte vi med at danne en spiral med cirka same bredde. Vi målte længden af appelsinskrællen og vi beregnede forholdet mellem appelsinens radius og radius for den kugleflade hvorpå satellitten bevæger sig men det er givetvis ikke den rigtige måde at gøre det på.

3.2 Problem "Måne satellit" – løsningsforslag fra Hold Dini, Pisa, Italy

Hold "Dini" kom med en ide der er tættere på den som forskerne ved Matematisk Institut ved Pisa Universitet tror, er den rigtige

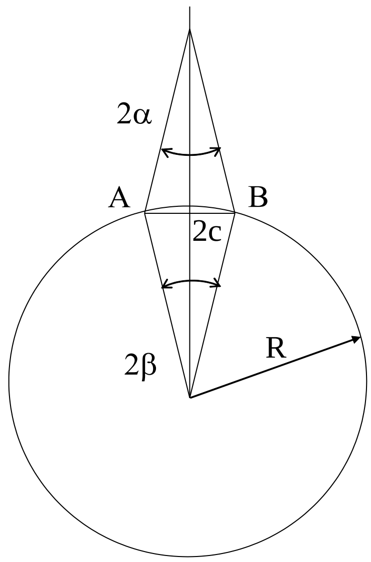
Se skæringen mellem månekuglen og planen gennem satellitten og betragt linjerne der afgrænser synsvinkelkeglen. (Se figuren nedenfor). Kuglekalotten som dækkes af kameraet danner i tværsnittet buen AB. Vi vil i det følgende finde sammenhænge mellem de angivne data med henblik på at beregne længden af buen AB og se på arealet der overstryges når satellitten bevæger sig ad sin bane.

Data for problemstillingen:

$R = 1738km$ Radius for Månen

$2\alpha = 20°$

$H = R$ Satellittens højde over måneoverfladen



Idet c betegner halvdelen af korde AB og β betegner halvdelen af centervinklen for bue AB giver trigonometriske betragtninger:

$$\sin\beta = \frac{c}{R}$$
$$c = R\left(2 - \sqrt{1 - (\sin\beta)^2}\right)\tan\alpha$$

hvor af man får

$$\frac{c}{R} = \sin\beta = 0.179$$

Derfor er, idet a betegner den halve bue AB:

$$a = R\beta = 313.1km$$

Arealet af den kuglekalot som kameraet dækker i et billede er derfor:

$$A_c = 2\pi R^2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{R}\right)^2}\right) = 3.072 \cdot 10^5\,km^2$$

Vi kan nu opstille en ligning til at beregne en teoretisk mindsteværdi L_{mt} for projektionen på Månen af satellittens banekurve:

$$A_c + L_{mt} \cdot 2a = 4\pi R^2 ,$$

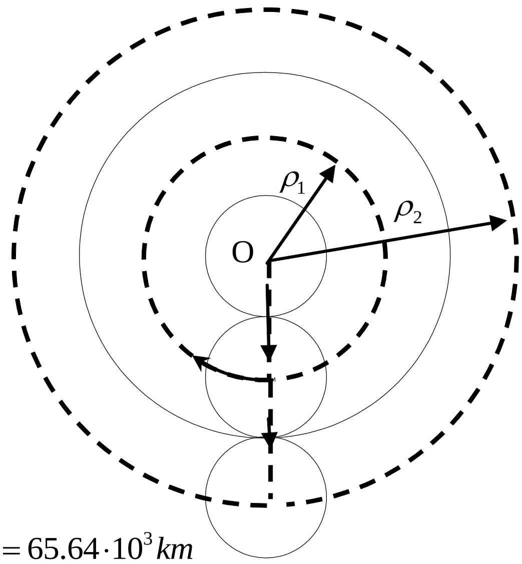
og dermed

$$L_{mt} = 34.6R = 6.013 \cdot 10^4 km .$$

Vi kan ikke være sikre på at denne værdi kan opnås ved en kontinuert bane for satellitten. En mulig strategi er at dække månefladen med parallelle bånd der løber langs meridianerne begyndende ved den ene pol.

Hvis vi beregner radius for hvert band får vi:

i	ρ_i (km)
1	612.8
2	1.147 10^3
3	1.534 10^3
4	1.723 10^3
5	1.692 10^3
6	1.443 10^3
7	1.00910^3
8	445.4



Af dette finder vi at banelængden er:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{8} \rho_i + \left(\pi - \beta + \gamma\right) R = 37.8R = 65.64 \cdot 10^3 km$$

hvor der er medregnet en tur rundt på den cirkel der skal til for at dække den sidste åbning som ikke er dækket af den 8. cirkel.

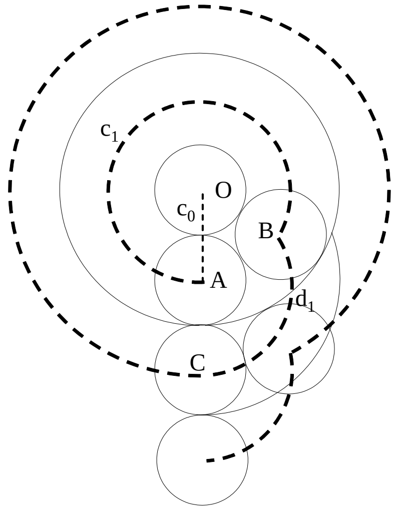
Effektiviteten af denne strategi kan udtrykkes ved:

$$e_1 = \frac{L_{mt}}{L_1} = 0.916$$

En mulig forøgelse af effektiviteten fås ved følgende strategi: overgangen til næste niveau sker via cirkler der tangerer den vi begyndte med niveauet før

Værdierne for denne bane er givet ved:

i	c_i (km)	d_i (km)
0	612.8	
1	3.227 10^3	1.585 10^3
2	6.583 10^3	1.295 10^3
3	9.013 10^3	1.211 10^3
4	1.021 10^4	1.184 10^3
5	1.001 10^4	1.188 10^3
6	8.445 10^3	1.227 10^3
7	5.717 10^3	1.341 10^3
8	2.175 10^3	137.3



Af tabellen fås

$$L_2 = c_0 + \sum_{i=1}^{8} \left(c_i + d_i \right) = 37.5R = 65.17 \cdot 10^3 \, km$$

som giver en lille forbedring af effektiviteten I forhold til før:

$$e_2 = \frac{L_{mt}}{L_2} = 0.923 .$$

Derfor foreslår vi følgende minimale bane for satellitten:

$$2L_2 = 75.0R = 130.3 \cdot 10^3 \, km .$$

Det ville være naturligt at arranger et fælles møde mellem Hold "Dini" og forskerne ved Pisa Universitet med det formal at finde en fuldstændig løsning af problemet.

4 Konklusioner

Vi må med Sokrates acceptere at det eneste vi med sikkerhed ved er at "vi ved ikke noget". Viden om begrænsninger ved vore teorier, metoder og færdigheder i at forstå verden omkring os må vi betragte som en stærkt motiverende faktor for fortsatte forsøg på at overskride disse grænser.

References:

[1] **http://www.dm.unipi.it/~eroe/index.php , site of the "Galilei" competition**

[2] **http://www.dm.unipi.it/~eroe/problemi.php , problems proposed by Math Labs**