Alla ricerca dei cammini minimi

Oleg Mushkarov

1 Introduzione

Come visto nel tema precedente, i problemi di massimo e minimo derivano non solo dalla scienza e tecnica e le loro applicazioni, ma anche dalla vita di ogni giorno. Gran parte di questi sono di natura geometrica e il tema si concentra su problemi dei seguenti tipi: *Trovare il più breve sistema di cammini che connette un insieme di punti nel piano* . Tali problematiche si incontrano nel design di strutture del mondo reale, come linstradamento delle condotte idrauliche e di riscaldamento in un edificio, tracciare la disposizione delle porte logiche di un circuito per diminuire il tempo di propagazione, determinare la strada che i gasdotti devono seguire in modo che sia la più breve possibile considerando il terreno attraversato o evitato, e altri *reti minime*.

Qui presentiamo alcuni metodi matematici elementari per risolvere problemi dei cammini minimi in modo da incoraggiarvi ad affrontare sfide più impegnative di questo tipo.

2 La strada piu breve tra due o tre punti

In questa sezione consideriamo alcuni problemi dei cammini minimi che possono essere risolti usando il principio generale che *la strada più breve fra due punti nel piano è la linea retta che li unisce*.La forma più semplice di questo principio è la *disuguaglianza triangolare* che afferma che la somma di due dei lati di un triangolo è maggiore del terzo. Più in generale, la lunghezza di una linea spezzata che unisce 2 punti A e B è maggiore della lunghezza della linea retta AB (Figura 1).

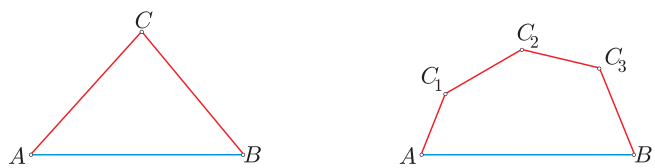

Figure 1

Iniziamo con il seguente problema concreto.

Problem 2.1. *Diseganre la strada più breve tra due laghi "circolari".*

Solution. Indicate con L_1 e L_2 i cerchi che rappresentano i laghi e siano O_1 e O_2 i loro centri (Figura 2).Il nostro scopo è trovare dei punti M su L_1 e N su L_2 tali che la lunghezza del segmento MN è minima. Notate

che questo è equivalente a minimizzare la lunghezza della linea spezzata O_1MNO_2 (Perché?). Ma sappiamo che la sua lunghezza è non meno di quella del segmento O_1O_2. Quindi la strada più breve fra i due laghi è il segmento M_0N_0, dove M_0 e N_0 sono i punti di intersezione del segmento O_1O_2 con L_1 e L_2 (Figura 3).

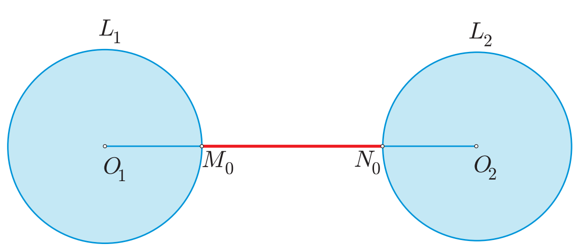

Figure 3

Poi consideriamo alcuni problemi la cui soluzione richiede trasformazioni geometriche come riflessione rispetto a una retta o rotazione intorno a un punto. Lidea è di “trasformare” il problema dato in uno che cerca la linea spezzata più corta che connette due punti. Un tipico problema concreto di questo tipo c il seguente.

Problema 2.2. *Due citt A e B sono sul lato di unautostrada. Una società deve costruire una stazione di servizio G sullautostrada e una strada da A a B attraverso G che va dritta da A a G e da G a B. Progettare tale strada in modo che abbia lunghezza minima.*

Soluzione. Come sempre in matematica le città A, B e la stazione di servizio G sono considerate punti, e lautostrada – come una linea retta l (Figura 4). Quindi il problema è determinare la posizione dei punti G su l in modo che la somma $AG+GB$ sia minima. Sia B' la simmetrica di B rispetto l.

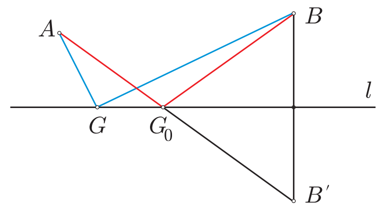

Figure 4

Allora $BG = B'G$ e la disuguaglianza triangolare per il $\triangle AGB'$ implica che

$$AG+GB = AG+GB' \geq AB'.$$

Luguaglianza è verificata quando G è il punto di intersezione G_0 di l e la retta AB'. Quindi la società deve costruire la stazione di servizio nel punto G_0. Il problema precedente è stato trattato circa 2000 anni fa da Haron [1] secondo il quale la strada più breve tra A e B via l èd esattamente quella che attraverserebbe un raggio di luce emesso da A e osservato da B. Da qui abbiamo dedotto che quando un raggio di luce viene riflesso su uno specchio langolo di incidenza è uguale allangolo di riflessione. Il prossimo problema conosciuto come *teorema di Pompeiu* [1], è essenziale per trovare la strada più breve fra 3 punti.

Problem 2.3. *Per ogni triangolo equilatero ABC e ogni punto P nel piano la disuguaglianza $AP+BP \geq CP$ è vera. Luguaglianza è vera se e solo se il punto P giace sullarco $\widehat{AB}$ del circumcerchio del $\triangle ABC$, il quale non contiene C.*

Suggerimento. Considerate 60° di rotazione antioraria intorno al vertice A , che porti P in P'. Allora la disuguaglianza data è equivalente alla disuguaglianza triangolare $PP'+P'C \geq PC$.

Consideriamo il seguente problema pratico: *Date tre città A,B,C, trovare la più breve strada che le connette*. La prima soluzione che ci viene in mente sono i due lati più corti del $\triangle ABC$ (Figura 5). Tuttavia vedremo che la risposta è più complicata. Considerate un sistema arbitrario di strade (incurvate come volete) che connettono A,B,C. Allora una può andare da A a C e unaltra da B a C usando alcune strade del sistema (Figura 6).

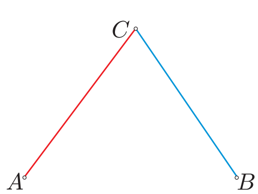

Figure 5

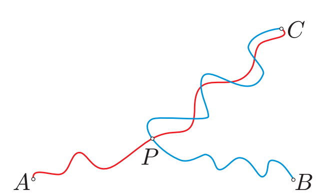

Figure 6

È intuitivo assumere che queste due strade giacciono interamente allinterno o sui lati del $\triangle ABC$, altrimenti potremo trovare un sistema di strade più breve che connette le cittá. Quindi si intersecano in C e possibilmente anche in altri punti. Indichiamo con P quello più vicino a A andando da A a C (Figura 6).

Allora il sistema di rette PA, PB, PC è più corto del sistema dato e quindi arriviamo al classico *problema di Fermat*:

Dati tre punti A, B, C nel piano trovare un punto P tale che la somma delle distanze da P a A, B, C è minima.

La soluzione di questo problema è ben nota [1, 3] e ci mostra che la strada più breve che connette le tre città A, B, C, è quella composta dai tre segmenti PA, PB, PC, dove P è il punto di Fermat del $\triangle ABC$ (Figura 7), oppure quella composta dai due lati più corti del $\triangle ABC$ (Figuro 8) a seconda che langolo più ampio del $\triangle ABC$ è di meno di 120° oppure no.

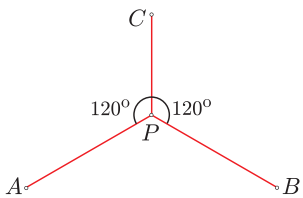

Figure 7

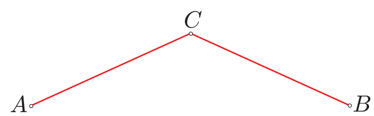

Figure 8

3 L'albero di Steiner

Dopo la sezione precedente siamo tentati di chiederci la domanda generale di come potremo trovare il sistema di strade più breve che connette un numero arbitrario di città. Lo stesso ragionamento di sopra ci porta alla conclusione che è sufficiente considerare sistemi composti da rette tali che solo due città sono connesse da una strada unica. In matematica, precisamente nella teoria dei grafi, tali sistemi di rette sono chiamate *alberi*. Quindi la nostra domanda si riduce al problema seguente posto da Jarnik e Kössler [7] nel 1934 e conosciuto come *problema dellalbero di Steiner*:

Dato un numero finito di punti nel piano trovare lalbero di lunghezza minima che connette questi punti usando anche punti ausiliari.

Ogni punto che viene aggiunto per costruire la strada più breve è detto *punto di Steiner*. Come sappiamo, nel caso di tre punti A, B, C tali che langolo più ampio del $\triangle ABC$ è di meno di 120° dobbiamo aggiungere un punto di Steiner, esattamente il punto di Fermat del $\triangle ABC$. Mostreremo che se abbiamo quattro città A_1, A_2, A_3, A_4 che sono i vertici di un quadrato immaginario, la strada più breve è un albero con vertici nei punti dati e altri due punti di Steiner.

Per dimostrare questo, considerate un sistema arbitrario di strade A_1, A_2, A_3, A_4. Possiamo assumere che le strade da A_1 a A_3 e da A_2 a A_4 giacciono dentro o sui lati del quadrato quindi si intersecano in alcuni punti. Indichiamo con P e Q il primo e lultimo di questi punti e andando da A_1 a A_3 (Figura 9). Allora è chiaro che lalbero composto dai segmenti A_1P, A_4P, PQ, A_2Q, A_3Q (Figura 10) dà un sistema di strade più breve di quello iniziale.

Quindi dobbiamo trovare lalbero dei cammini minimi di questo tipo. Per farlo, useremo il teorema di Pompeiu (Problema 2.3). Costruiamo i triangoli equilateri A_1A_4A and A_2A_3B fuori dal quadrato(Figura 11). Allora

$$PA_1 + PA_4 \geq PA, \quad QA_2 + QA_3 \geq QB$$

e quindi

$$PA_1 + PA_4 + PQ + QA_2 + QA_3 \geq AP + PQ + QB \geq AB.$$

Queste disuguaglianze mostrano che lalbero minimo si ottiene quando P e Q sono i punti di intersezione del segmento AB e i circumcerchi del $\triangle A_1A_4A$ e $\triangle A_2A_3A$, che sono diversi da A e B (Figura 11).

Quindi nel caso di un quadrato abbiamo due alberi di copertura minimi che connettono i suoi vertici(Figure 12), ciascun albero con due punti di Steiner. Notate che gli angoli fra dei segmenti che si intersecano in un punto di Steiner sono uguali a 120°.

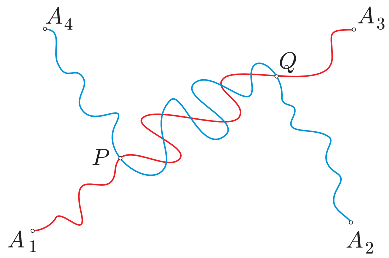

Figure 9

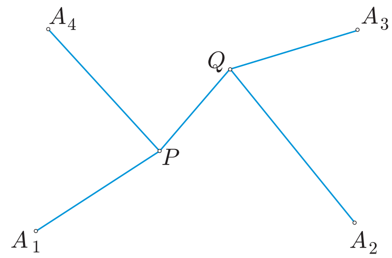

Figure 10

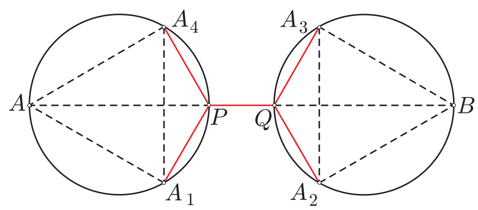

Figure 11

Le osservazioni fatte sugli alberi minimi di Steiner per 3 e 4 punti (Figura 7 and Figura 12) sono vere anche per un numero arbitrario di punti. Precisamente ogni albero minimo di Steiner ha le seguenti proprietà

• Tutti i punti dati sono connessi a 1, 2 oppure a 3 altri punti.

• Tutti i punti di Steiner sono connessi a 3 altri punti.

• Ogni due lati formano un angolo di almeno 120°. Quindi i lati di un punto di Steiner formano un angolo di esattamente 120°.

• Gli alberi minimi di Steiner di n punti hanno al massimo $n-2$ punti di Steiner.

Trovare lalbero dei cammini minimi di Steiner, nel caso generale, può essere complesso, dal momento che i punti possono trovarsi ovunque nel piano. È stato risolto per la prima volta da Melzak [8] nel 1961 e da allora molti algoritmi corretti per risolvere il problema di Steiner sono stati scritti. Tuttavia è stato mostrato da Garey, Graham e Johnson [4] che questo problema è NP-difficile, cioè che non ci sono algoritmi che lo risolvono in tempo polinomiale. Per esempio il noto algoritmo di *Quicksort* che ordina n oggetti è un algoritmo polinomiale dal momento che esegue al massimo An^2 operazioni per qualche costante A. Come osservato in [5] al momento lalgoritmo migliore conosciuto è *GeoSteiner version 3.1* ed è stato implementato da Warme, Winter, e Zachariasen [9] nel 2001. Può risolvere istanze del problema con 2000 punti.

4 Compiti e problemi

• *Sia M il punto medio della retta AB. Dimostrare che $CM \leq \frac{1}{2}(CA+CB)$ per ogni punto C. Quando si verifica luguaglianza?*

Suggerimeto. Considerate il punto simmetrico C' di C rispetto a M e applicate la disuguaglianza triangolare per il $\triangle CC'A$. Luguaglianza è vera se C giace sulla retta AB, fuori dal segmento aperto AB.

• *Trovare i punti X sui lati di un quadrato tali che la somma delle distanze da X ai vertici è minima.*

Suggerimento. Usate il problema di Erone. *Risposta*. I punti medi dei lati del quadrato.

• *Due laghi "circolari" L_1 e L_2 sono su un alto dellautostrada l. Una società deve costruire una stazione di servizio G su l e strade dalle rive di L_1 e L_2 che collegano direttamente G. Trovare tali strade di lunghezza minima.*

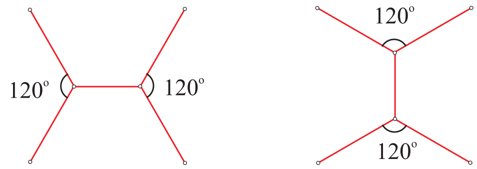

Figure 12

Suggerimento. Usate Problema 1.1 per il lago L_1 e il simmetrico del lago L_2 in l.

• *Due città A and B sono separate da un fiume che ha rive parallele. Trovate la strada più breve da A a B che passa attraverso un ponte sul fiume perpendicolare alle sue rive.*

Suggerimento. Indicate con l_1 e l_2 le rive del fiume e con l la retta equidistante da l_1 e l_2. Sia A_1 il simmetrico di A in l. Il problema dato si riduce al problema di Erone per i punti B, A_1 e la retta l_2.

• *Trovate i punti X in tali che la somma delle distanze da X ai vertici di :*
  (a) *quadrilatero convesso dato*
  (b) *poligono con simmetria centrale dato*
è minima.

Suggerimento. (a) Usate la disuguaglianza triangolare per dimostrare che i punti desiderati sono quelli di intersezione delle diagonali del quadrilatero. (b) Usate riflessione nel centro di simmetria del poligono e il primo problema.

Bibliografia

[1] Andrescu T., Mushkarov O., Stoyanov L. *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006.

[2] Bern M. W., Graham R. I. *The Shortest-Network Problem*, Sci. Am., 260 (1) (January 1989), 84–89.

[3] Kourant R., Robbins H. *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1941.

[4] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. *The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees*, SIAM J. Appl. Math., 32 (4) (1977), 835–859.

[5] Herring M. *The Eucledean Steiner Tree Problem*, Denson University, April 28, 2004, Google.

[6] Hwang F. K., Richard D. S., Winter P. *The Steiner Tree Problem*, Elsevier, North Holland, 1992.

[7] Jarnik O. V., Kössler O. *O minimalnich oratech obsakujicich u danych body*, Casopis Pesk. Mat. Fyz., 63 (1934), 223–235 (in Czech).

[8] Melzak Z. A. *On the Problem of Steiner*, Canad. Math. Bull., 4 (2) (1961), 143–150.

[9] Winter P., Zackariasen M. *Large Euclidean Steiner Minimum Trees in an Hour*, ISMP 1997.

Altri riferimenti bibliografici

- Greenberg I., Robertello R. *The Three Factory Problem*, Math. Mag. 38 (1965), 67–72.
- Wu L., Chao K. *Spanning Trees and Optimization Problems*, Chapman & Hill/CRC, 2004, Chapt. 7.
- `http://www.archive.org/details/RonaldLG1988`, 12.01.2010
  Movie: Ronald L. Graham: The Shortest Network Problem (1988).