Stelle di Natale

John Andersen

1 Introduzione

Allo scopo di trovare tecniche d’insegnamento stimolanti, gli insegnanti di matematica si dedicano ad una ricerca in continua evoluzione per trovare argomenti e attività affascinanti. Progettare e realizzare poliedri a forma di stella (per esempio stelle di Natale) potrebbe essere una tale attività. Se gli studenti sono abituati ai tradizionali esercizi con carta e penna probabilmente non avranno molta fiducia in una tale iniziativa e la prenderanno alla leggera. Sarà compito dell’insegnante far capire agli studenti l’utilità dal punto di vista matematico di una tale attività. Probabilmente alcuni insegnanti dovranno provarla per conto loro prima di poterla accettare come un approccio serio alla matematica.

2 Prerequisiti di matematica

A questo punto probabilmente vi aspettereste una lista di conoscenze e abilità matematiche necessarie. Gli esempi verranno in seguito perché prima di tutto avrete bisogno di una mente aperta e buona volontà di osservare modelli e strutture. Una mia studentessa una volta disse (prima di aver provato) che non sarà necessaria tanta matematica per costruire questo tipo di stelle. Lei mi disse che sarebbe possibile fare tali stelle usando un righello, delle forbici e un pezzo di cartone sul tavolo in cucina.

Provando scoprirete che la progettazione di modelli è molto utile. Starsene seduti sporchi di colla provando a incollare dei pezzi che non combaciano, è una situazione piuttosto sgradevole. Probabilmente vi accorgerete che un po’ di geometria sarebbe utile.

D’altra parte in certe situazioni siete costretti a costruire dei modelli per comprendere la struttura geometrica dei soggetti esaminati. Bill Wheatland, un architetto che ha lavorato per Utzon’s Drawing Office 1964-66, disse la cosa seguente in un programma sulla costruzione del Teatro dell’opera a Sidney (canale televisivo Danese DR2, Maggio 2003): “Quando vi trovate di fronte ad una superficie complessa, ad esempio quella di una macchina, è molto meglio fare un modello: dopo lo potrete osservare, misurare, e toccare – capirete in questo modo di cosa si tratta”.

Nei vostri primi tentativi di costruire delle stelle, non dovreste impiegare troppa matematica. Provate prima con mezzi semplici. Usando le vostre abilità geometriche più semplici sarete in grado di fare la vostra prima stella. Poi vi accorgerete che più matematica impiegate, più controllo avrete sul processo di costruzione. Impiegando matematica più sofisticata sarete in grado di costruire modelli più sofisticati. L’uso di algebra vettoriale e geometria analitica saranno di grande aiuto nelle fasi successive.

3 Materiali

Cartone, colla, e delle forbici sono essenziali, ma anche strumenti utili come un compasso, un righello, una matita, una calcolatrice e un computer.

Fig. 1 Dopo la geometria arriva il momento di vedere se i pezzi combaciano.

4 Stelle di Natale – Approccio di esplorazione

Presentate un oggetto ai vostri studenti – ad esempio la stella nella foto sotto. La prima sfida sarà fare una copia della stella. Poi potreste fare una copia in scala diversa dall'originale, e altre ancora con un numero diverso di punte – otterrete forme geometriche diverse (punte più lunghe o corte). In questa fase del processo potete liberare la vostra fantasia. Per esempio potreste fare una stella come quella che si vede in secondo piano nella foto in Fig.2.

Fig.2 Stella originale comprata in un negozio di arte e artigianato – e una versione modificata in secondo piano.

Fig.3 E una linea di alcune versioni differenti

4.1 Compiti

[1] Trovare una stella e fare una copia 1:1 di essa.

[2] Fare delle stelle simili a quelle in [1] ma in scala diversa (più grandi e/o piccole).

[3] Fare delle stelle con un numero diverso di punte.

5 Stelle di Natale – Alcune istruzioni

Come insegnate sarete tentato di aiutare troppo gli studenti in questa fase, limitando la loro creatività nel processo di sviluppo e realizzazione dei prodotti. D'altra parte, quando si bloccheranno, dovrete aiutarli e incoraggiarli sia dal punto di vista psicologico che matematico. Parlando metaforicamente, termini come

"impalcatura" e "zona di sviluppo prossimale" possono essere trovati nella letteratura.

Una descrizione dettagliata dell'approccio da seguire può essere necessaria per aiutare a iniziare. Qui non sarà dato un manuale che vi guiderà passo dopo passo a causa della mancanza di spazio. Potete trovare di più sulla pagina web del progetto.

Un'altra cosa fondamentale è rendersi conto dell'importanza della geometria. Infatti, ai giorni d'oggi l'uso di un software geometrico non può essere trascurato – l'uso di un software può rendere il lavoro più produttivo e piacevole, poiché aumenta la precisione e offre la possibilità di sperimentare nei dettagli la progettazione.

Le foto sotto danno alcuni suggerimenti sul passaggio da descrizione geometrica a oggetti fisici.

Fig. 4 Scegliete n come numero di punte della stella (qui è raffigurata una stella a cinque punte). Poi scegliete il raggio r e R dei cerchi giacenti sul piano di simmetria. Potete costruire una stella piatta, che servirà come base per creare le due metà del solido a forma di stella.

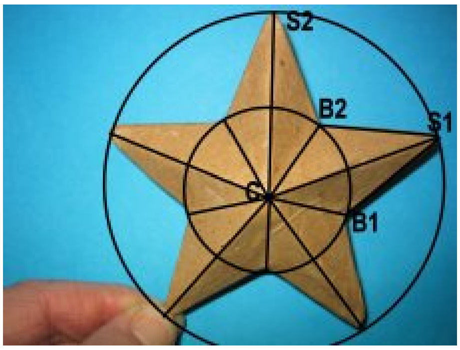

Fig. 5 Il solido a forma di stella è composto di due metà identiche, ciascuna delle quali è in effetti una piramide che ha come base un poligono a forma di stella. Dovete costruire degli sviluppi piani di ciascuna delle due metà che poi dovete ritagliare, piegare e incollare alle basi.

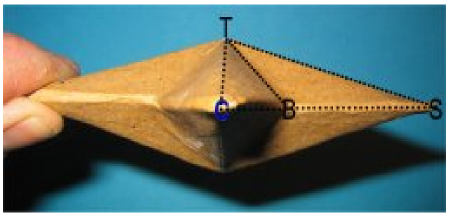

Fig. 6 Lo sviluppo piano di metà stella è composto di triangoli congruenti come il triangolo TBS nella foto. La misura dei lati può essere ottenuta con misurazioni o con dei calcoli. L'approccio dei calcoli vi permette di fare correzioni precise nel progetto senza avere una stella vera. L'uso di un programma come Geometers Sketchpad permette di fare modifiche dinamiche.

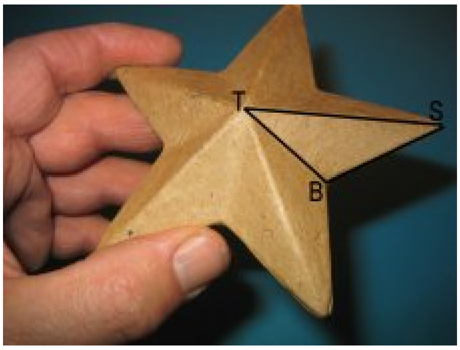

Fig. 7 Sotto è mostrato uno sviluppo di stella a cinque punte (composta di triangoli) come quella della foto sopra(i cartoncini d'incollatura sonno omessi).

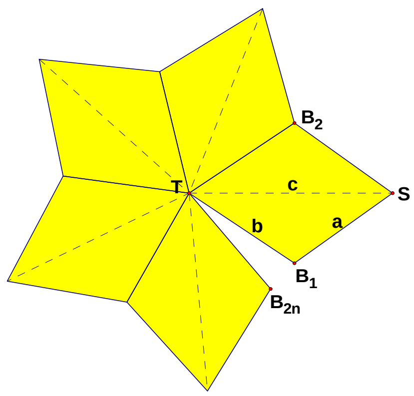

Fig. 7 Sviluppo di triangoli a cinque punte

Le relazioni fra i diversi elementi sono riassunte nelle seguenti figure, dove C denota il centro della stella. Da queste figure potete misurare o calcolare e costruire.

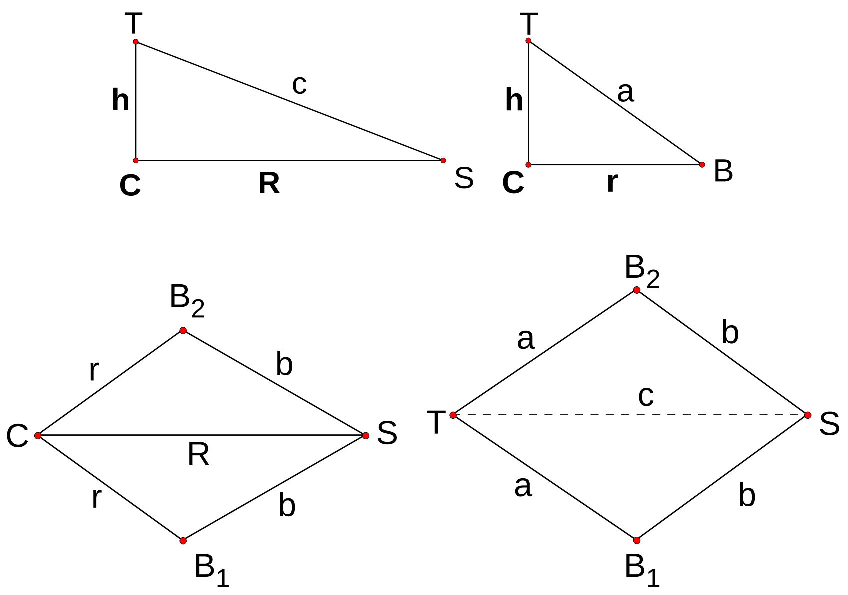

Fig. 8 I triangoli necessari per lo sviluppo in Fig. 7. Vedi anche Fig. 4 – Fig. 6.

Le relazioni algebriche possono essere ottenute usando il Teorema di Pitagora e il Teorema del Coseno.

$$(1) \quad a^2 = r^2 + h^2$$

$$(2) \quad c^2 = R^2 + h^2$$

$$(3) \quad b^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Fig. 9 Relazioni derivanti da Fig. 8

5.1 Compiti

[1] Scegliere alcuni valori per r, R e h. Calcolare a, b e c. Costruire la stella e controllare la grandezza (misurare r, R e h).

[2] Usare un programma di geometria dinamica per costruire uno sviluppo.

[3] Scegliere alcuni valori per a, b e c. Potete determinare i valori di h, r e R?

6 Un'indagine approfondita sul problema della progettazione: No tagli.

Nella prima sezione ho brevemente illustrato che ci sono grandi opportunità per fare delle indagini matematiche a livello anche superiore di scuola media. Considerate questo problema: Possiamo costruire uno sviluppo di stella in modo che non ci siano dei tagli che debbano essere incollati? Lo sviluppo in Fig.7 ha un taglio. Quali sono le condizioni per evitare il taglio?

Per prima cosa si osserva(Fig. 7 and Fig. 8) che l'anglo dello sviluppo $\angle B_1TB_2$ deve essere $\frac{360°}{n}$

Ponendo $\alpha = \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ e usando il teorema del coseno nel triangolo TB_1S si ottiene che deve essere soddisfatta la seguente equazione

(4) $$\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

dove a, b e c sono come in Fig. 7 e 8.

Sostituendo (1), (2) e (3) da Fig. 9 in (4) ottenete:

(5)
$$\alpha = \frac{r^2 + h^2 + R^2 + h^2 - \left(r^2 + R^2 - 2rR\alpha\right)}{2\sqrt{r^2 + h^2}\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Dopo aver riordinato, elevato al quadrato ed espanso l'espressione diventa:

(6)
$$\alpha^2 r^2 + \alpha^2 R^2 - 2rR\alpha = h^2\left(1 - \alpha^2\right) = h^2\beta^2 \text{ with } \beta = \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Risolvendo rispetto a h si ottiene:

(7)
$$h = \sqrt{\frac{\alpha^2\left(r^2 + R^2\right) - 2rR\alpha}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{2rR}{\frac{\beta}{\alpha}\beta}} = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{\tan^2\left(\frac{180°}{n}\right)} - \frac{2rR}{\tan\left(\frac{180°}{n}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}}$$

Per essere non negativo il radicando in (7) devono essere soddisfate le condizioni:

$$\alpha\left(r^2 + R^2\right) > 2rR \Leftrightarrow \frac{r^2 + R^2}{rR} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{r}{R} + \frac{R}{r} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{\alpha}x + 1 > 0 \text{, con } x = \frac{r}{R}$$

Il discriminate D del polinomio di secondo grado nell'ultima disequazione è:

$$D = \frac{4}{\alpha^2} - 4 = \frac{4\left(1 - \alpha^2\right)}{\alpha^2} = \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \text{ e le radici sono } \frac{\frac{2}{\alpha} \pm \frac{2\beta}{\alpha}}{2} = \frac{1 \pm \beta}{\alpha}$$

Da qui potete ottenere la condizione:

$$\frac{r}{R} < \frac{1 - \sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

Quando questa condizione è soddisfatta, potete calcolare h da r e R e costruire uno sviluppo senza tagli.

Le formule sopra possono essere usate fissando R(=1) e disegnando h come funzione di r per mostrare che più piccolo è r rispetto a R, più sarà alta la stella.

Letture consigliate per approfondire

- Jenkins, G., Bear, M. Paper Polyhedra in Colour, Tarquin, UK,1999
- http://www.korthalsaltes.com/ (January 15, 2010)
- http://www.georgehart.com/ (January 15, 2010)
- http://www.software3d.com/ (January 15, 2010)