Viaggiando nello spazio ad accelerazione 1 g.

1 Introduzione

È ovvio che la civiltà deve trovare materie prime nello spazio nel futuro non troppo lontano altrimenti ne soffrirà la mancanza. Lo scenario è ben noto: il motore a razzo deve accelerare il veicolo spaziale fino alla velocità di viaggio, poi il motore verrà spento, e l'equipaggio viaggerà a gravità zero finche non raggiungerà la destinazione e la nave dovrà decelerare fino alla velocità di atterraggio. Si stima che per fare un tale viaggio ci vuole molto tempo, ad esempio si calcola che la spedizione Terra – Marte - Terra durerebbe 520 giorni [1]. Un periodo così prolungato di assenza di gravità può avere un impatto devastante sulla salute dell'equipaggio. Tuttavia esiste la possibilità di evitare tutto questo – accelerare e decelerare l'astronave a 1 g dovrebbe simulare la gravità terrestre. In questo articolo ci occupiamo di analizzare i viaggi Terra – Luna, Terra – Marte, Terra – Plutone. Le domande principali sono quanto tempo durerebbero i viaggi e quale sarebbe la massima velocità di viaggio. Possiamo facilmente rispondere usando i concetti di fisica insegnateci alle scuole superiori e i risultati sono molto interessanti – infatti, indicano che l'esplorazione dei pianetti è possibile. Tuttavia questi risultati non ci dicono niente sull'astronave: Quali sono le proprietà del motore? Di quanta energia ha bisogno?Sono veramente possibili questi viaggi? Per questo motivo dobbiamo andare oltre e studiare le proprietà dell'astronave e del motore a razzo dal punto di vista della velocità di espulsione dei gas relativa al veicolo e della quantità di energia necessaria. Questo problema appartiene alla dinamica dei corpi con massa variabile e necessità di calcoli. Questo articolo è per gli studenti che sono interessati alle tecnologie spaziali e alle astronavi e che hanno acquisito le basi del calcolo.

2 Conoscenze matematiche e scientifiche necessarie per questa unità

2.1 Contenuti matematici

[1]Manipolazione di frazioni e termini esponenziali

[2]Derivate, manipolazione di integrali

[3]Risoluzione di semplici equazioni integrali

2.2 Concetti scientifici

[1]Moto uniformemente accelerato

[2]Lavoro meccanico

[3]Conversione di energia

3 Quesiti e problemi

3.1 Durata del viaggio e velocità massima raggiunta

Supponiamo che l'astronave si muove su una retta. Inizia a velocità 0, per metà tragitto accelera a 1 g, spegne il motore, si gira a 180° (il tempo necessario è il più breve possibile, lo trascuriamo), e decelera a 1 g fino a velocità 0. Sia il tempo totale di viaggio t_T .L'accelerazione dura $t_\mathrm{T}/2$, quindi la velocità raggiunta(la massima velocità di viaggio) e la distanza sono:

$$v_\mathrm{T} = g\frac{t_\mathrm{T}}{2},\ d_\mathrm{T} = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_\mathrm{T}}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

La decelerazione dura $t_\mathrm{T}/2$, perciò la distanza percorsa è la stessa. La distanza totale è:

$$d_T = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_T}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} g \left(\frac{t_T}{2}\right)^2 = \frac{g t_T^{\ 2}}{4} . \tag{2}$$

Allora

$$t_T = 2\sqrt{\frac{d_T}{g}} , \tag{3}$$

e quindi

$$v_T = \sqrt{g d_T} . \tag{4}$$

Otteniamo $t_T \approx 3.5$ ore, $v_T \approx 61$ km/s a distanza Terra – Luna 3.8×10^5 km [2], $t_T \approx 2$ giorni, $v_T \approx 858$ km/s a distanza Terra – Marte 7.5×10^7 km [3], e $t_T \approx 18$ giorni, $v_T \approx 7{,}542$ km/s a distanza Terra – Plutone 5.8×10^9 km [4].

I valori del tempo totale sono interessanti. Fanno pensare che si può dare inizio all'esplorazione dei pianetti. Tuttavia non prendiamo in considerazione come è fatta l'astronave – quali sono le caratteristiche del motore e di quanta energia ha bisogno.

3.2 Equazione del razzo di Ciolkovskij

La spinta (cioè la forza) di un motore a razzo ideale è data dall'equazione [5].

$$F = v_v m_s , \tag{5}$$

dove m_s è la portata di massa del propellente(cioè la massa di carburante bruciata al secondo e che percorre l'ugello come gas caldo) e v_v è la velocità di espulsione(cioè la velocità del gas relativa alla navicella spaziale). Sia v_v costante. Sia m_s data in funzione del tempo. Sia *M* la massa iniziale della navicella al tempo *t*=0. La massa m della navicella al tempo *t* è allora:

$$m = M - \int_0^t m_s(z) \mathrm{d}\, z . \tag{6}$$

Dalla legge di Newton si ottiene(l'accelerazione è 1 g):

$$v_v m_s = g\left(M - \int_0^t m_s \,\mathrm{d}\, z \right) \tag{7}$$

Differenziamo rispetto al tempo e otteniamo:

$$v_v \frac{\mathrm{d}\, m_s}{\mathrm{d} t} = -g m_s . \tag{8}$$

Separiamo le variabili e integriamo:

$$m_s = C \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_v} t} \tag{9}$$

dove *C* è costante. Sia la portata di massa del propellente M_s al tempo *t*=0. Allora $C = M_s$ e

$$m_{\mathrm{s}} = M_{\mathrm{s}}\,\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t}\,. \tag{10}$$

Se $t = 0$, allora l'equazione. (5) dà

$$gM = v_{\mathrm{v}} M_{\mathrm{s}}\,, \tag{11}$$

da qui

$$M_{\mathrm{s}} = \frac{gM}{v_{\mathrm{v}}}\,. \tag{12}$$

E in fine

$$m_{\mathrm{s}} = \frac{gM}{v_{\mathrm{v}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t}\,. \tag{13}$$

Il tempo di combustione è uguale a t_{T}, quindi la massa totale m_{f} del carburante è:

$$m_{\mathrm{f}} = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} m_{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}t = \frac{gM}{v_{\mathrm{v}}}\int_0^{t_{\mathrm{T}}} \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t}\,\mathrm{d}t = -M\left[\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t}\right]_0^{t_{\mathrm{T}}} = M\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t_{\mathrm{T}}}\right). \tag{14}$$

La massa relativa m_{fr} del carburante all'inizio è:

$$m_{\mathrm{fr}} = \frac{m_{\mathrm{f}}}{M} = 1-\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}}t_{\mathrm{T}}} \tag{15}$$

Da cui segue che

$$t_{\mathrm{T}} = -\frac{v_{\mathrm{v}}}{g}\ln(1-m_{\mathrm{fr}})\,. \tag{16}$$

Notiamo che:

1) $0 < (1-m_{\mathrm{fr}}) < 1$, allora $\ln(1-m_{\mathrm{fr}}) < 0$, e $t_{\mathrm{T}} > 0$.

2) Se la navicella avesse accelerato per tutto il tempo fino a t_{T}, la velocità finale sarebbe

$$v_{\mathrm{T}} = g t_{\mathrm{T}} = -v_{\mathrm{v}}\ln(1-m_{\mathrm{fr}})\,. \tag{17}$$

Riscrivendo l'equazione (17) e introducendo M_0 come massa della navicella senza carburante otteniamo l'equazione fondamentale dei razzi, la famosa equazione del razzo di Ciolkovskij[6]

$$v_{\mathrm{T}} = -v_{\mathrm{v}}\ln(1-m_{\mathrm{fr}}) = -v_{\mathrm{v}}\ln\left(1-\frac{m_{\mathrm{f}}}{M}\right) = -v_{\mathrm{v}}\ln\left(\frac{M-m_{\mathrm{f}}}{M}\right) = -v_{\mathrm{v}}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = v_{\mathrm{v}}\ln\left(\frac{M}{M_0}\right). \tag{18}$$

3.3 Velocità di espulsione minima di un motore a razzo

La navicella nel nostro modello accelera fino a $t_{\mathrm{T}}/2$. La velocità massima è (vedi Eq. (1))

$$v_{\mathrm{T}} = g\frac{t_{\mathrm{T}}}{2} = -\frac{v_{\mathrm{v}}}{2}\ln(1-m_{\mathrm{fr}}) \tag{19}$$

Poi la navicella decelera. La distanza totale percorsa col motore acceso è (vedi Eq. (2))

$$d_{\mathrm{T}} = \frac{g t_{\mathrm{T}}^{2}}{4} = \frac{v_{\mathrm{v}}^{2}}{4g} \ln^{2}(1 - m_{\mathrm{fr}}). \tag{20}$$

Di conseguenza

$$v_{\mathrm{v}} = -2 \frac{\sqrt{g d_{\mathrm{T}}}}{\ln(1 - m_{\mathrm{fr}})}. \tag{21}$$

La velocità minima di espulsione del motore a razzo per carburanti con masse relative diverse è in Tabella 1.

m_{fr} (%)	v_v (km/s) Terra – Luna	Terra – Marte	Terra – Plutone
99	27	370	3,300
90	53	750	6,600
50	180	2,500	22,000

Tabella 1 Velocità minima di espulsione del motore a razzo

Attualmente la velocità massima dei motori a razzo è $v_{\mathrm{v}} \approx 4.4$ km/s [7]. A $m_{\mathrm{fr}} = 90$ %, Le eq. (16, 19, 20) danno $t_{\mathrm{T}} = 1{,}000$ s, $v_{\mathrm{T}} \approx 5$ km/s, $d_{\mathrm{T}} \approx 2{,}700$ km. La distanza è troppo piccola per rendere significativo questo modo di viaggiare nello spazio. Perciò, viaggiare a 1 g nello spazio è riservato al futuro, quando eventualmente saranno usati nuovi motori a razzo [8,9].

3.4 Quantità di energia necessaria per il motore a razzo

Il lavoro fatto dal motore durante il tempo t_{T} di combustione è:

$$W = \int_0^s \mathbf{F} \mathbf{ds} = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} \mathbf{F} \mathbf{v}\, \mathrm{d}t = \int_0^{t_{\mathrm{T}}} F v\, \mathrm{d}t \tag{22}$$

La spinta del motore è data delle eq. (5, 13), la velocità della navicella è $v = gt$, quindi

$$W = g^{2} M \int_0^{t_{\mathrm{T}}} t\, \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}} t}\, \mathrm{d}t = M v_{\mathrm{v}}^{2} \left[1 - \left(1 + \frac{g t_{\mathrm{T}}}{v_{\mathrm{v}}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{g t_{\mathrm{T}}}{v_{\mathrm{v}}}} \right]. \tag{23}$$

La massa totale m_{f} di carburante è data dall'eq. (14). L'energia richiesta per unità di massa di carburante è allora:

$$W_{\mathrm{fu}} = \frac{W}{m_{\mathrm{f}}} = v_{\mathrm{v}}^{2} \frac{1 - \left(1 + \frac{g t_{\mathrm{T}}}{v_{\mathrm{v}}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{g t_{\mathrm{T}}}{v_{\mathrm{v}}}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{v}}} t_{\mathrm{T}}}} = 4 g d_{\mathrm{T}} \frac{m_{\mathrm{fr}} + (1 - m_{\mathrm{fr}}) \ln(1 - m_{\mathrm{fr}})}{m_{\mathrm{fr}} \ln^{2}(1 - m_{\mathrm{fr}})}. \tag{24}$$

La densità energetica minima di carburanti con diverse masse relative è in Tabella 2

m_{fr} (%)	W_{fu} (J/kg) Terra – Luna	Terra – Marte	Terra – Plutone
99	6.7×10^{8}	1.3×10^{11}	1.0×10^{13}
90	2.1×10^{9}	4.1×10^{11}	3.2×10^{13}
50	9.5×10^{9}	1.9×10^{12}	1.5×10^{14}

Tabella 1 Densità energetica minima di carburanti

Il petrolio ha il massimo potere calorifico (cioè densità energetica) tra tutti i combustibili fossili, ed è $W_{\mathrm{fu}} \approx 4.7 \times 10^{7}$ J/kg [10]. L'idrogeno liquido ha il massimo potere calorifico fra tutti i combustibili ed è

$W_{fu} \approx 1.4 \times 10^{8}$ J/kg. La densità energetica del carburante fissile U 235 è $W_{fu} \approx 7.7 \times 10^{13}$ J/kg. La densità energetica dell'idrogeno come carburante di fusione nucleare è $W_{fu} \approx 3.0 \times 10^{14}$ J/kg.

Possiamo notare che solamente motori a fissione e a fusione rendono possibili i viaggi. In fine, la formula $\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2$ dà $W_{fu} \approx 9 \times 10^{16}$ J/kg. Poi, l'eq. (24) dà a distanza Terra - Plutone $m_{fr} \approx 0.13\,\%$, che equivale alla massa relativa di circa 2 litri di petrolio in macchina . Quindi, i viaggi interplanetari a 1 g con astronavi propulse da annichilazione di materia, sarà molto efficiente.

3.5 Conclusioni

Le precondizioni per realizzare i viaggi Terra − Luna, Terra – Marte, e Terra – Plutone ad accelerazione 1 g (metà strada +1g, metà strada −1g) se il carburante è 50 % della massa iniziale sono:

1) Velocità di espulsione dei gas relativa al veicolo di 180 km/s, 2500 km/s, e 22500 km/s;
2) Carburante con densità energetica di 10 GJ/kg, 2 TJ/kg, e 150 TJ/ kg, la quale può essere facilmente raggiunta da combustibili a fissione o fusione.

Collegamenti esterni

[1] http://www.imbp.ru/Mars500/Mars500-e.html (July 2, 2007)

[2] Moon. In Wikipedia, The Free Encyclopaedia. Retrieved 10:36, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moon&oldid=141805733

[3] Mars. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:38, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mars&oldid=141969984 [2]

[4] Pluto. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:38, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pluto&oldid=141528650

[5] http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/rockth.html (July 2, 2007)

[6] Tsiolkovsky rocket equation. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:33, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tsiolkovsky_rocket_equation&oldid=140956051

[7] Space Shuttle main engine. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:39, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Space_Shuttle_main_engine&oldid=141241061

[8] http://www.grc.nasa.gov/WWW/ion/overview/overview.htm. Retrieved 10:39, July 2, 2007)

[9] Rocket engine. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:40, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rocket_engine&oldid=141073495

[10] Energy density. In Wikipedia,The Free Encyclopedia. Retrieved 10:42, July 2, 2007, from http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_density