Коледни звездиДжон Андерсен, Дания

1 Увод

За да намерят мотивиращи задачи за учениците си, учителите по математика постоянно търсят увлекателни теми и дейности. Проектирането и конструирането на звездообразни многостени (например коледни звезди) е пример за такава дейност. Ако учениците са свикнали с традиционните занимания с хартия, молив и ножици, може би ще пристъпят към такава дейност с недоверие и дори – с пренебрежение. Затова за учителя е истинско предизвикателство да отвори очите им за математическите възможности в контекста на такава дейност. Може би някои учители ще я изпробват за себе си, преди да я приемат като сериозна математическа тема.

2 Математически предпоставки

Тук може би очаквате списък от математически понятия и умения. Преди всичко трябва да пристъпите към тази тема непредубедено и с желание да проектирате и изследвате различни структури. Една моя ученичка ми каза (преди да изпробва на практика проекта), че няма нужда от много математика, за да се конструират коледни звезди – *достатъчни са линийка, ножици и чиния* смяташе тя. Когато човек започне работа по проекта, си дава сметка, че е добре да си направи предварителен план и да използва геометрични разсъждения, ако не иска да се окаже сред лепило и парченца хартия, които не си пасват.

От друга страна понякога трябва да си направите предварителни модели, за да съобразите какъв геометричен апарат да използвате. Известеният архитект Bill Wheatland казва в интервю на тема Операта в Сидни (Фиг. 0): *Когато трябва да проектирате сложна геометрична форма – като например повъхнината на лека кола – много по-добре е да си направите модел: тогава може да я видите, да я измерите, да я докоснете и да разберете за какво става дума.*

За първите си опити да направите коледни звезди не е нужно да използвате много сложен математически апарат – започнете с прости средства. След това ще осъзнаете, че с усложняване на математическия апарат (например векторна алгебра и аналитична геометрия) ще получавате все по-добри модели.

Фиг. 0 Операта в Сидни

3 Материали

Необходими са цветна хартия, лепило, ножици, но освен тях ще ни трябват пергел, линийка, молив, калкулатор и компютър.

Фиг. 1 След геометрията настъпва вълнуващ момент: Ще си паснат ли елементите?

4 Коледни звезди – един изследователски подход

Покажете един модел на звезда на учениците си – например предната звезда на Фиг.2. Първото предизвикателство е да направите копие на тази звезда. След това – да направите копие в друг мащаб, модел с друг брой и форма на лъчите (например – по-дълги, по-дебели). Например, може да направите модел от типа на звездата на заден план от Фиг. 2. Всичко зависи от въображението ви.

Фиг.2 Оригинална елхова играчка и нейна вариация (на заден план).

Фиг.3 Още вариации на оригиналната коледна звезда

4.1 Задачи

[1] Намерете оригинална коледна звезда и направете копие в мащаб 1:1.

[2] Направете копия на звездата от [1], но в различен мащаб (по-малки или по-големи).

[3] Направете звезди с различен брой лъчи.

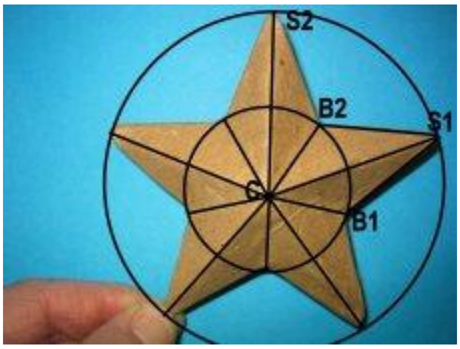
5 Коледни звезди – някои указания

Като учители вие ще се изкушавате да помагате прекалено на учениците си в началните етапи, като ги лишавате от удоволствието да се чувстват истински автори на творчески процес и продукти. От друга страна, когато стигнат до задънена улица, трябва да ги подкрепяте и окуражавате, както психологически, така и на математическо равнище.

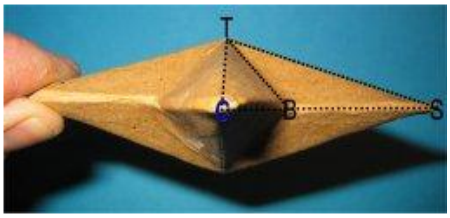
Важно е да се отбележи ролята на елементарната геометрия. Нещо повече, използването на геометричен софтуер може да направи работата по-ефективна и приятна, понеже дава възможност за по-голяма точност и експерименти с детайли от дизайна.

Фигурите по-долу дават някои упътвания за прехода от геометрично описание към физическия обект.

Фиг. 4 Определете броя n на лъчите на звездата (в случая е изобразена петолъчка). След това определете радиусите r и R на окръжностите, лежащи в равнината на симетрия. Оттук може да построите равнинна завезда, която да служи като основа, поддържаща двете половини на тримерната звезда.

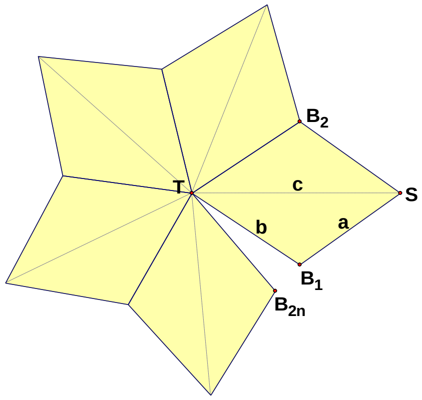


Фиг. 5 Тримерната звезда се състои от две идентични половини, които представляват пирамиди с основа многоъгълник с формата на звезда. Развивките на тези пирамиди могат да се конструират с помощта на геометрични разсъждения, след това – да се изрежат, сгънат и залепят към основата.



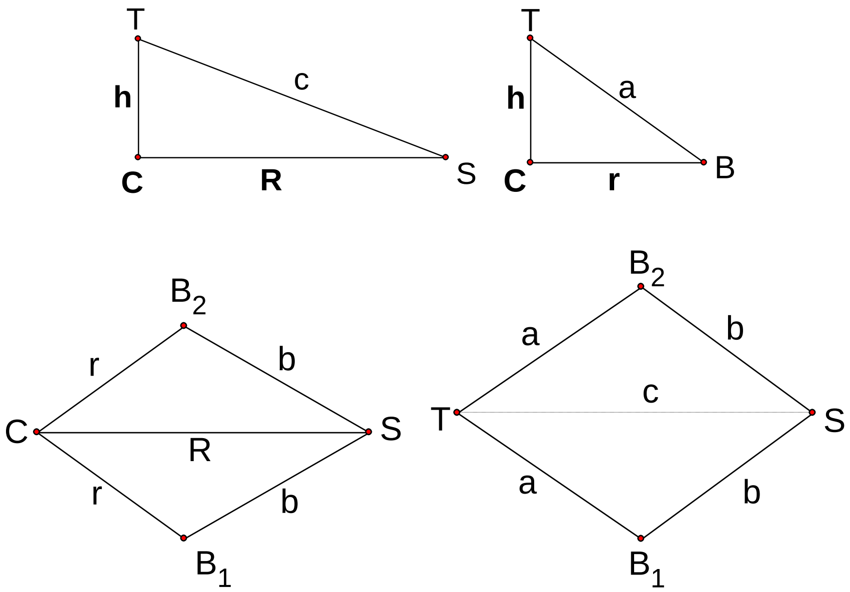
Фиг. 6 Развивката на полу-звездата се състои от еднакви триъгълници (като триъгълника TBS на снимката вдясно). Страните на триъгълника може да се определят чрез измерване или пресмятане. Пресмятанията ви позволяват да направите точен дизайн, без да имате физически модел на звезда под ръка. Може да използвате и динамичен софтуер.

На Фиг. 7 е дадена типична развивка на звезда с пет лъча, като тази на снимката (без ивиците за залепване).



Фиг. 7 Развивка на петолъчна коледна звезда.

На Фиг. 8 са означени различните величини, определящи развивката, където *C* е центърът на звездата.



Фиг. 8 Необходими триъгълници за конструирането на развивката от Фиг. 7. (Виж също Фиг. 4 – Фиг. 6).

Лесно могат да се установят следните равенства:

$$(1) \quad a^2 = r^2 + h^2$$

$$(2) \quad c^2 = R^2 + h^2$$

$$(3) \quad b^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

9 Зависимости между величините, участващи във фигурите на Фиг. 8

5.1 Задачи

[1] Дайте стойности на *r*, *R* и *h*. Пресметнете *a*, *b* и *c*. Конструирайте звездата и определете размера й (измерете *r*, *R* и *h*).
[2] Използвайте динамичен софтуер, за да построите развивката.
[3] Дайте стойности на *a*, *b* и *c*. Можете ли да определите *h*, *r* и *R*?

6 По-задълбочен преглед на проектирането: без разрязване.

Тук накратко ще покажем, че могат да се правят математически изследвания на по-високо равнище. Да разгледаме следната задача: *Може ли да се конструира развивка на половин звезда така, че да няма разрез* (какъвто сме направили на Фиг. 7)? Какви са условията да се избегне необходимостта от залепване?

От Фиг. 7 и Фиг. 8 виждаме, че $\angle B_1TB_2$ е равен на $\frac{360°}{n}$

Като положим $\alpha = \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ и приложим косинусовата теорема към триъгълника TB_1S, виждаме, че трябва да бъде в сила равенството

$$\textbf{(4)} \qquad \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

където *a, b* и *c* са от Фиг. 7 и 8.

Като заместим (1), (2) и (3) от Фиг. 9 в (4) получаваме:

$$\textbf{(5)} \qquad \alpha = \frac{r^2 + h^2 + R^2 + h^2 - \left(r^2 + R^2 - 2rR\alpha\right)}{2\sqrt{r^2 + h^2}\sqrt{R^2 + h^2}}$$

което след подходящо преобразуване става

$$\textbf{(6)} \qquad \alpha^2 r^2 + \alpha^2 R^2 - 2rR\alpha = h^2\left(1 - \alpha^2\right) = h^2\beta^2, \text{ където } \beta = \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Като решим относно h, получаваме:

$$\textbf{(7)} \qquad h = \sqrt{\frac{\alpha^2\left(r^2 + R^2\right) - 2rR\alpha}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{2rR}{\frac{\beta}{\alpha}\beta}} = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{\tan^2\left(\frac{180°}{n}\right)} - \frac{2rR}{\tan\left(\frac{180°}{n}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}}$$

Условията подкоренните величини в (7) да бъдат неотрицателни са:

$$\alpha\left(r^2 + R^2\right) > 2rR \Leftrightarrow \frac{r^2 + R^2}{rR} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{r}{R} + \frac{R}{r} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{\alpha}x + 1 > 0, \text{ където } x = \frac{r}{R}$$

Дискриминантата D на квадратния тричлен в последното неравенство е

$$D = \frac{4}{\alpha^2} - 4 = \frac{4\left(1 - \alpha^2\right)}{\alpha^2} = \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \text{ и корените са } \frac{\frac{2}{\alpha} \pm \frac{2\beta}{\alpha}}{2} = \frac{1 \pm \beta}{\alpha}$$

Оттук получаваме:

$$\frac{r}{R} < \frac{1 - \sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

Когато това условие е изпълнено, може да пресметнете h от r и R и да построите развивка без разрязване.

Друго приложение на горните формули може да бъде да начертаем графиката на h като функция на r за фиксирано R (=1), като покажем, че колкото по-малко е r от R, толкова по-висока ще бъде звездата.

Препоръчителни четива

- Jenkins, G., Bear, M. Paper Polyhedra in Colour, Tarquin, UK,1999
- http://www.korthalsaltes.com/ (January 15, 2010)
- http://www.georgehart.com/ (January 15, 2010)
- http://www.software3d.com/ (January 15, 2010)

Превод: Евгения Сендова